ГЛАВА I.

Важнѣйшія свѣдѣнія о сопротивленіи среды.

Первымъ побужденіемъ къ зарожденію знаній о сопротивленіи среды послужило изученіе движенія падающихъ тѣлъ. Галилей и Флорентинская академія были и здѣсь, какъ во многихъ другихъ частяхъ механики и физики, начинателями дѣла. Первые опыты Риччіолли (1640—1650), равно какъ одни изъ полнѣйшихъ для того времени опыты Маріотта и Ла-Гира (1679—1714) представляютъ именно изслѣдованія временъ паденія тѣлъ въ водѣ и воздухѣ. Стали понимать, что воздухъ вѣсомое тѣло, а потому и узнали, что онъ, какъ вода, замедляетъ паденіе и движеніе вообще.

Общія, сами собою понятныя соображенія и немногіе опыты, произведенные въ это время, дали уже поводъ считать сопротивленіе среды пропорціональнымъ площади сѣченія, плотности среды и нѣкоторой степени скорости. Затѣмъ ученіе о сопротивленіи среды развивалось преимущественно подъ вліяніемъ двухъ практическихъ направленій, требующихъ знакомства съ этимъ предметомъ, а именно: мореплаванія и артиллеріи; двигающійся въ водѣ корабль и летящій въ воздухѣ снарядъ представляютъ ясные примѣры важнаго значенія законовъ сопротивленія среды, потому что тамъ и здѣсь двигатель расходуетъ, если не всю, то значительную долю своей силы на борьбу съ сопротивленіемъ среды. Теоретическія изслѣдованія Ньютона надъ сопротивленіемъ среды, изложенныя во 2-мъ томѣ его знаменитаго творенія: Philosophiae naturalis principia mathematica, составляютъ исходную точку всего дальнѣйшаго движенія свѣдѣній объ этомъ предметѣ. Ньютонъ также производилъ (1710—1719) опыты паденія шарообразныхъ тѣлъ въ водѣ и въ воздухѣ и воспользовался ими для сужденія о сопротивленіи среды. Но онъ первый пошелъ въ дѣлѣ рѣшенія задачъ сопротивленія, кромѣ опытнаго способа, путемъ чисто теоретическимъ и опытными изслѣдованіями старался только узнать, какую изъ (трехъ) гипотезъ, которыя онъ имѣлъ въ виду, должно признать за отвѣчающую дѣйствительности.

Строго говоря, не то что теперь, а во время самого Ньютона, онъ самъ, изъ своихъ собственныхъ опытовъ, легко долженъ былъ заключить, что ни одна изъ имѣвшихся у него въ виду (трехъ) гипотезъ, объясняющихъ сопротивленіе среды, не удовлетворяетъ дѣйствительности [1]). Тѣмъ не менѣе исходныя соображенія Ньютона долго и крѣпко держались въ наукѣ, и ради этого мы ихъ излагаемъ здѣсь въ томъ видѣ, въ какомъ они наиболѣе подходятъ къ дѣйствительности и какъ они излагаются въ большинствѣ сочиненій конца прошлаго (послѣ Эйлера) и начала нынѣшняго столѣтія. (Собственныя мысли Ньютона изложены отдѣльно, въ первомъ приложеніи къ этой книгѣ). Эти, отчасти видоизмѣненныя мысли Ньютона, многіе называли «обыкновенною теоріей (théorie ordinaire) сопротивленія.

Ньютонъ долженъ былъ, конечно, задаться нѣкоторыми гипотезами, для того, чтобы имѣть возможность подвергнуть математическому изслѣдованію тотъ невидимый процессъ взаимнодѣйствія между тѣломъ и частицами среды, который составляетъ причину сопротивленія среды. Ни точныхъ наблюденій, ни тѣмъ паче какихъ либо точныхъ законовъ сопротивленія, которые могли бы лечь въ основу математическаго анализа, могли бы служить поводомъ для составленія удовлетворительной гипотезы — ни у Ньютона, ни у другихъ математиковъ, занимавшихся этимъ вопросомъ не было. Пришлось задаться произвольными гипотезами, берущими начало въ первомъ знакомствѣ съ предметомъ,—въ наблюденіи, а не въ измѣреніи или опытѣ. А если явленіе сложно, какъ сопротивленія среды, то такой путь не приводитъ никогда къ вѣрнымъ, согласнымъ съ природою, слѣдствіямъ. Это видно во всемъ историческомъ развитіи точныхъ знаній. Выводъ этотъ можно выразить кратко примѣромъ изъ астрономіи: Ньютонъ силенъ только Кеплеромъ. Ньютонова гипотеза тяготѣнія согласуется съ природою, даже и зарождается въ головѣ Ньютона, только потому, что раньше Кеплеръ свелъ, извлекъ изъ массы наблюденій дѣйствительные законы движенія планетъ. Гипотеза Ньютона есть плодъ этихъ выводовъ и ими одними она сильна, дѣлается дѣйствительною теоріею, захватывающею всѣ частности природнаго явленія. Нельзя и думать, чтобы такая вѣрная гипотеза зародилась безъ суммы точно извѣстныхъ фактовъ, или при помощи одного общаго

---

[1]) Три гипотезы Ньютона суть: 1) жидкость рѣдкая упругая, состоящая изъ упругихъ частицъ, 2) жидкость рѣдкая упругая, состоящая изъ неупругихъ частицъ и 3) жидкость сплошная. Для шара (r радіусъ) получается по первой сопротивленіе $= 2h\pi r^2\lambda$, по второй $= h\pi r^2\lambda$, по третьей $\frac{h}{2}\pi r^2\lambda$, гдѣ h есть высота, отвѣчающая скорости, λ плотность. Для воздуха и воды Ньютонъ получилъ по опыту результатъ близкій къ третьей гипотезѣ, а нельзя же воздухъ счесть неупругою жидкостью. Кромѣ того эта третья гипотеза, оправдавшаяся для шаровъ, сама по себѣ очевидно не отвѣчаетъ дѣйствительности, потому что по ней сопротивленіе шара и цилиндра при одномъ сѣченіи одинаково, чего нѣтъ въ дѣйствительности и что не могъ, конечно, думать самъ Ньютонъ.

знакомства съ явленіями. Хотя такая случайность мыслима, но ея нѣтъ въ исторіи знаній. И немудрено, что въ сложномъ вопросѣ сопротивленія среды, безъ точнаго знакомства съ дѣйствительностью, Ньютонъ и др. теоретики задались гипотезою, совершенно не удовлетворяющею природѣ явленій. Обыкновенно, вслѣдъ за Ньютономъ считали сопротивленіе зависящимъ отъ удара передней части движущагося тѣла о шарообразныя частицы среды — которыя, разъ ударившись о поверхность тѣла, навсегда ее оставляютъ и дѣйствуютъ независимо другъ отъ друга. При такой гипотезѣ сопротивленіе среды сводится къ ясному и простому вопросу объ ударѣ тѣла. Все сомнѣніе въ приложеніи къ дѣйствительности ограничивается при этомъ обыкновенно вопросомъ о мѣрѣ упругости ударяющихъ тѣлъ. Можно было бы ждать поэтому большаго различія между сопротивленіемъ газовъ и капельныхъ жидкостей и можно было бы думать далѣе, что задняя, кормовая часть движущагося тѣла не оказываетъ вліянія на сопротивленіе—а это не отвѣчаетъ дѣйствительности. Также мало соотвѣтствуетъ ей основная формула, выводимая изъ гипотезы и принаровленная при помощи коэффиціента K къ дѣйствительности, а именно:

$$R = KM\Delta v^2 \sin^2\alpha \quad [1] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad I$$

гдѣ R есть прямое давленіе или сопротивленіе (число килограм.), испытываемое тѣломъ въ направленіи движенія. K постоянный коэффиціентъ, одинаковый для всякой среды и для всѣхъ тѣлъ, M величина (кв. метры) плоскости, представляющей проэкцію движущейся плоскости (или призматическаго тѣла, двигающагося по своей оси, потому что въ обоихъ случаяхъ проэкція одна) на плоскость, перпендикулярную къ направленію движенія (въ случаѣ призмы— M есть сѣченіе призмы, въ шарѣ это есть площадь большаго круга, въ кораблѣ—плоскость миделя); Δ вѣсъ (килограммы) одного объема (одного куб. метра) жидкости, въ которой происходитъ движеніе (въ случаѣ воды Δ близка къ 1000, для морской воды

[1]) Мы увидимъ далѣе, что такая же точно формула удовлетворяетъ и тому случаю, когда разсматривается сопротивленіе, перпендикулярное къ плоскости, если на мѣсто величины M поставить величину самой плоскости при наклонѣ α. Въ этомъ послѣднемъ видѣ часто при математическомъ изслѣдованіи предмета примѣняютъ формулу сопротивленія. Но въ практическомъ примѣненіи прилично для сущности дѣла относить сопротивленіе къ проэкціи тѣла, а не къ его поверхности (напр. къ меделю корабля, а не къ его передней боковой поверхности) и опредѣлять только то сопротивленіе, которое дѣйствуетъ въ направленіи пути, а не въ направленіи, перпендикулярномъ къ плоскости движущагося тѣла, а потому мы придали здѣсь всѣмъ множителямъ формулы сопротивленія вышеуказанное значеніе. Такъ какъ значеніе членовъ, входящихъ въ основную формулу сопротивленія, должно быть вполнѣ ясно усвоено для знакомства съ сопротивленіемъ, то вслѣдъ за симъ я считалъ нужнымъ развить приложеніе формулы сопротивленія для разныхъ простѣйшихъ случаевъ ея примѣненія. Считаю также полезнымъ упомянуть здѣсь, что вышеприведенный видъ формулы сопротивленія, отвѣчающій идеямъ Ньютона, данъ былъ не имъ самимъ, а его послѣдователями, но былъ почти тотъ же у Pardies въ 1670 году. (См. Gehler's Phys. Wörterbuch X. p. 1810).

къ 1020, для воздуха къ 1,2); v скорость (въ метрахъ), то-есть путь, проходимый въ одну секунду, α уголъ, образуемый передней плоскостію съ направленіемъ пути (съ осью призмы).

Обходя подробности изложенія гипотезы [1]) и выводъ слѣдствій, укажемъ только главныя руководящія соображенія Ньютона и его ближайшихъ послѣдователей въ теоретической части ученія о сопротивленіи среды. Взаимнодѣйствія жидкихъ частицъ, равно какъ и треніе частицъ среды о движущееся тѣло, первые изслѣдователи считали столь малыми сравнительно съ тѣми затратами, которыя идутъ на перемѣщеніе частицъ, что вовсе не приняли въ разсчетъ при опредѣленія сопротивленія. Другими словами, это значитъ, что *все* сопротивленіе среды приписывалось ея *инерціи*, то-есть всю затрату силы и двигателя считали происходящею отъ необходимости сдвинуть, вывести изъ покоя массу жидкости, уступающей свое мѣсто движущемуся тѣлу. При такомъ представленіи, конечно, можно было уподобить весь механизмъ сопротивленія удару тѣлъ. Относительно этого послѣдняго, какъ извѣстно, должно отличать ударъ упругихъ тѣлъ (какъ билліардный шаръ) отъ удара неупругихъ тѣлъ (каковъ до нѣкоторой степени свинецъ). Природныя же тѣла занимаютъ средину, потому что нѣтъ ни совершенно упругой, ни абсолютно неупругой матеріи. Если представимъ, что въ неподвижной средѣ плоскость движется въ направленіи нормальномъ къ каждой линіи на ней лежащей, то-есть уголъ между плоскостью и направленіемъ ея движенія есть прямой ($\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$), то очевидно прежде всего, что сопротивленіе, по смыслу вышеприведеннаго представленія о немъ, будетъ пропорціонально величинѣ плоскости (M въ уравненіи I) и что, при той же скорости, оно будетъ возрастать пропорціонально плотности среды Δ, потому что масса сдвигаемыхъ частицъ среды возрастетъ съ величиною плоскости и числомъ частицъ, содержащихся въ одномъ объемѣ.

Такъ какъ при возрастаніи скорости не только возрастаетъ число частицъ, ударяющихъ о тѣло, но еще и сила удара, то и должно ждать возрастанія сопротивленія пропорціонально квадрату скорости (v^2). Съ измѣненіемъ уклона плоскости къ направленію движенія, о данную плоскость ударяетъ очевидно во столько разъ меньшее число частицъ, во сколько синусъ угла меньше синуса прямаго угла, то-есть единицы; сверхъ того въ направленіи движенія встрѣчается при этомъ лишь уменьшенное сопротивленіе, потому что сила удара разлагается по направленію параллельному плоскости и по направленію ей перпендикулярному, изъ которыхъ дѣйствуетъ только послѣдняя слагающая. Но и она, въ свою очередь, разлагается на двѣ силы: одну параллельную движенію, другую перпендикулярную къ ней. Обыкновенно изслѣдуется только эта послѣдняя. Другая слагающая сопротивленія перпендикулярна пути и составляетъ то реакціонное дѣйствіе сопротивляющейся среды, которое сжимаетъ бока судна

[1]) Они изложены въ прибавленіи, сопровождающемъ эту книгу.

во время движенія его въ бо́льшей мѣрѣ, чѣмъ въ покойной водѣ. Эта же перпендикулярная слагающая служитъ для подъема змѣйка, дѣйствуетъ при ударѣ крыльевъ, при работѣ винта и т. п. Если ограничиться однимъ прямымъ сопротивленіемъ, то-есть параллельнымъ движенію, то легко вывести, что для призмы, двигающейся по направленію оси, при уклонѣ ея передней плоскости на уголъ α. сопротивленіе получается пропорціональнымъ квадрату синуса угла встрѣчи. Такъ какъ законъ этотъ исторически весьма важенъ. могъ бы имѣть дѣйствительно важное значеніе при расчетѣ сопротивленія тѣлъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, если бы былъ справедливъ, и такъ какъ въ приложеніи закона квадрата синусовъ должно ясно отличать нѣкоторыя опредѣленные случаи, то мы и разсмотримъ, въ смыслѣ Ньютоновыхъ гипотезъ, сопротивленіе наклонной плоскости, считая сопротивленіе прямой плоскости (ур. I, полагая $\mathrm{Sin}\alpha = 1$, ибо $\alpha = 90°$) $R_1 = KM\Delta v^2$. Для ясности представимъ (черт. 1) призму, двигающуюся по направленію, указанному стрѣлкой. и параллельному оси призмы. По смыслу всего Ньютонова ученія, сопротивленіе ея равно сопротивленію ея конечной плоскости *abcd*, потому что она одна принимаетъ удары частицъ среды. Величину передней поверхности *abcd* назовемъ чрезъ S, и пусть уголъ, образуемый съ направленіемъ движенія или осью призмы, то есть уголъ *eac* или *fbd*, равенъ α. Назовемъ затѣмъ чрезъ M сѣченіе *efgh* призмы плоскостью перпендикулярною къ оси или къ направленію движенія. Очевидно, что $M = S\,\mathrm{Sin}\alpha$. Выразимъ линіею *mn* мѣру давленія или сумму силъ сопротивленія R_1 на призму, если ея передняя плоскость перпендикулярна къ направленію пути. Требуется опредѣлить мѣру сопротивленія R въ томъ случаѣ, когда передняя плоскость призмы имѣетъ уклонъ α. Разложимъ $mn = R_1$ на двѣ слагающія: *no* перпендикулярную къ плоскости и *mo* ей параллельную. Послѣдняя будетъ участвовать только въ треніи, которое вовсе не разсматривается Ньютономъ и его ближайшими послѣдователями. Остается только сопротивленіе, выражаемое линіею *on*. Назовемъ его чрезъ R_2. Это будетъ сопротивленіе, перпендикулярное къ плоскости. Величину его легко найдти, потому что $on = mn\ \mathrm{Sin}\alpha$, ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ *mon* линія *mn* параллельна *ac*, а линія *mo* параллельна *ac*, уголъ же $cae = \alpha$, а потому и $omn = \alpha$. Отсюда очевидно, что

$$R_2 = on = mn\ \sin\alpha = R_1 \sin\alpha = KM\Delta v^2 \sin\alpha = KS\Delta v^2\ \sin^2\alpha. \quad . \quad . \quad II$$

Эта формула, на видъ, совершенно тождественная съ I, выражаетъ въ сущности совершенно иное, чѣмъ I, потому что S есть дѣйствительная мѣра (а не проэкція, какъ M) передней плоскости движущейся призмы, а R_2 есть сопротивленіе *on*, къ ней перпендикулярное и слѣдовательно образующее уголъ $90 - \alpha$ съ направленіемъ движенія. Если бы захотѣли измѣрить эту величину R_2, то должно было бы двигать плоскость *abcd* въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, а пружинные вѣсы или динамометръ укрѣпить

перпендикулярно къ плоскости, а не въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, какъ для опредѣленія R или R_1. Сопротивленіе R_2 въ дѣйствительныхъ примѣненіяхъ практики удобнѣе всего разлагать на двѣ новыя слагающія: одну R искомую, направленную по оси призмы, а другую ей перпендикулярную, а потому перпендикулярную къ направленію движенія. Сопротивленіе перваго рода мы вездѣ въ этомъ сочиненіи будемъ называть или просто *сопротивленіемъ*, или *прямымъ*, или *параллельнымъ сопротивленіемъ* и будемъ означать чрезъ R (Résistence), а сопротивленіе, перпендикулярное направленію движенія, станемъ называть или *перпендикулярнымъ сопротивленіемъ*, или *реакціоннымъ* или просто *реакціею* [1]) и станемъ означать чрезъ Q. Очевидно, что при $\alpha = 90°$, $R = KM\Delta v^2 = KS\Delta v^2$, потому что $\sin 90° = 1$ и проэкція M = самой площади S. Тогда реакція Q = 0. Она является только при нѣкоторомъ уклонѣ. Когда онъ есть, движущаяся, наклонная книзу, поверхность поднимается, что и составляетъ реакціонное дѣйствіе сопротивленія. Если плоскость движется по направленію одной изъ линій, на ней самой находящейся, конечно, опять $Q = 0$, а по смыслу Ньютонова ученія, тогда и $R = 0$. Наша задача состоитъ теперь въ томъ, чтобы, зная $R_2 = on$, опредѣлить R и Q, руководясь не гипотезою Ньютона, а смысломъ самаго понятія о силѣ сопротивленія. Для этого стоитъ только построить на *on* паралелограммъ, и станетъ очевидно, что *on* замѣнится двумя слагающими: *nr* параллельною пути и равною R и *nq* или *or* перпендикулярною къ пути и равною реакціи Q. Изъ того, что *nq* и *or* перпендикулярны къ *ae*, а *on* къ *ac*, слѣдуетъ, что въ прямомъ треугольникѣ *onq* уголъ $onq = eac = \alpha$, а потому

$$Q = nq = or = on\cos\alpha = R_2\cos\alpha = KM\Delta v^2\sin\alpha\cos\alpha = KS\Delta v^2\sin^2\alpha\cos\alpha \quad . \quad III$$

$$R = rn = oq = on\sin\alpha = R_2\sin\alpha = KM\Delta v^2\sin^2\alpha = KS\Delta v^2\sin^3\alpha \quad . \quad IV$$

Это послѣднее выраженіе (IV) тождественно съ I. Такимъ образомъ, по смыслу гипотезы Ньютона, находится прямое сопротивленіе R_1 для призмы, кончающейся перпендикулярною плоскостью, если она движется по своей оси, затѣмъ отыскивается по той же гипотезѣ [2]) сопротивленіе R_2, перпендикулярное плоскости и въ томъ случаѣ, когда призма кончается наклонною плоскостью, если движеніе все-таки происходитъ по оси призмы; наконецъ, зная R_2, можно, уже не пользуясь гипотезою Ньютона, а просто примѣняя паралелограммъ силъ, найдти отношеніе параллельнаго и перпендикулярнаго сопротивленій. Если R_2 совершенно неизвѣстно, все же $\frac{Q}{R} = \frac{R_2\cos\alpha}{R_2\sin\alpha} = \text{Cotang}\ \alpha$. Слѣдовательно, помимо всякихъ другихъ гипотезъ (а слѣдовательно и помимо приложенія ученія о треніи

[1]) Эта слагающая сопротивленія служитъ для подъема змѣйка, для поступательнаго движенія птицы, ударяющей крыльями, рыбы, дѣйствующей хвостомъ, для дѣйствія вѣтряной мельницы и для развитія поступательнаго движенія пароходнымъ винтомъ.

[2]) Потому что треніе принимается равнымъ нулю.

къ вопросу о сопротивленіи), только примѣняя законъ параллелограмма силъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} Q = R\ \mathrm{cotg}\alpha \\ R = Q\ \mathrm{tg}\alpha \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad V$$

А такъ какъ $\mathrm{cotg}\ 45^\circ = 1$, то при $\alpha = 45^\circ$ прямое дѣйствіе = реакціи, при углахъ менѣе 45° котангенсъ болѣе единицы, а потому при малыхъ углахъ реакція болѣе прямого сопротивленія. При углахъ бо́льшихъ, чѣмъ 45°, реакція меньше прямаго сопротивленія. При 90° реакція = 0, потому что тогда $\mathrm{cotg} = 0$, при углахъ близкихъ къ 0° она наибольше превосходитъ прямое сопротивленіе, потому что при 0° $\mathrm{cotg}\alpha = \infty$ [1]). Мы останавливаемъ вниманіе на отношеніяхъ, выраженныхъ V-мъ уравненіемъ, особенно для того, чтобы показать два важныхъ обстоятельства, находящіяся въ связи со всѣмъ ученіемъ о сопротивленіи среды. Во-первыхъ, то, что отношеніе прямаго сопротивленія къ реакціи выводится независимо отъ Ньютонова ученія о сопротивленіи, а во-вторыхъ, то, что, зная одно изъ этихъ двухъ сопротивленій, можно узнать и другое, а потому все-равно, которое изъ нихъ ни изучать. Конечно, и тотъ выводъ, который выраженъ въ V уравненіи, требуетъ практической провѣрки, чтобы получить дѣйствительную прочность. Къ сожалѣнію, здѣсь должно ограничиться только однимъ рядомъ наблюденій, сдѣланныхъ въ 1871 г. членами лондонскаго аэронавтическаго общества *Wenham*'омъ и *Browning*'омъ на заводѣ Пенна въ Гриничѣ, гдѣ можно было воспользоваться большою воздуходувною машиною для того, чтобы направить струю воздуха на наклонныя площадки. Приэтомъ непосредственно и единовременно опредѣлялись обѣ слагающія: параллельная движенію и перпендикулярная. Во 2-й главѣ будутъ описаны эти опыты и приведены подлинныя числа, помѣщенныя въ Sixth Annual Report of the Aëronautical Society of Great Britain (for the year 1871 p. 76), здѣсь же я помѣщаю только средній выводъ, извлеченный мною изъ всѣхъ данныхъ опыта, а именно: при такой средней скорости дутья, что давленіе водянаго монометра было = 0,77 дюйма, поверхность (S) въ одинъ квадратный футъ испытывала давленія:

При $\alpha =$	90°	60°	45°	15°	
Параллельное R =	3,81	3,17	2,77	0,49	фунта.
Перпендикулярное Q =	0	1,86	2,77	1,94	»
$\frac{Q}{R} =$	0	0,587	1,00	3,96	
$\mathrm{Cotg}\alpha =$	0	0,577	1,00	3,73	

Такъ какъ въ опытахъ не было большой точности, то различіе между значеніями $\frac{Q}{R}$ и $\mathrm{cotg}\alpha$ должно считать находящимися въ предѣлѣ точности наблюденія, а потому и выводъ V, свободный

[1]) Въ сущности при $\alpha = 0$ величина прямого сопротивленія не равна нулю, равна тренію.

отъ ньютоновой теоріи и согласный съ опытомъ, должно считать, пока не получится другихъ болѣе точныхъ данныхъ, за вѣрный, опытомъ доказанный. А потому въ дальнѣйшемъ изложеніи этой главы и въ дальнѣйшемъ разборѣ теоріи сопротивл. мы ограничимся только однимъ прямымъ сопротивленіемъ R, параллельнымъ съ направленіемъ движенія.

Здѣсь однако слѣдуетъ сдѣлать еще одну оговорку. Въ предъидущемъ опытномъ примѣрѣ мы сочли за сопротивленіе, испытываемое движущимся тѣломъ, то давленіе, которое испытываетъ неподвижная плоскость, когда на нее движется среда, а не тотъ обычный случай, когда среда неподвижна, а тѣло въ ней движется. Оба явленія постоянно теоретически разсматриваются, какъ одно и то же явленіе. Принимается въ разсчетъ относительная скорость и считается безразличнымъ—движется-ли среда и давитъ на неподвижное тѣло, или движется тѣло и испытываетъ сопротивленіе, или движется и тѣло и среда, но есть разность въ скорости ихъ движенія. Лишь бы относительная скорость или разность скоростей была одна и та же, давленіе или сопротивленіе повидимому ничѣмъ другъ отъ друга не должны отличаться. Такое представленіе несомнѣнно, при прямомъ примѣненіи къ ньютоновой гипотезѣ. Мы увидимъ, однако, далѣе, что, судя по наблюденіямъ Дю-Буа и Дюшемена, а также и согласно съ авторитетнымъ мнѣніемъ Понселе, который въ этомъ отношеніи слѣдуетъ (хотя и съ оговоркою) за названными изслѣдователями, должно отличать оба случая, и давленіе, испытываемое неподвижнымъ тѣломъ въ движущейся средѣ (напр. въ рѣкѣ или подъ вѣтромъ), иное, чѣмъ сопротивленіе, испытываемое тѣломъ при движеніи въ средѣ, если скорости, плотность среды, формы и размѣры тѣла одни и тѣже. Впрочемъ, за названными учеными почти никто другой не слѣдуетъ, и намъ въ дальнѣйшемъ изложеніи придется только изрѣдка касаться того случая, когда тѣло неподвижно, а среда движется, потому что опытныя данныя, въ этомъ направленіи собранныя, весьма ограничены. Такова шаткость всего ученія о сопротивленіи, что даже столь элементарный вопросъ, какъ здѣсь упомянутый, не смотря на большую важность его рѣшенія, до сихъ поръ вовсе не обставленъ такими опытными данными, которыя не оставляли бы сомнѣнія въ его рѣшеніи въ ту или другую сторону. Рѣшая, какъ то дѣлаютъ обыкновенно изслѣдователи вопроса о сопротивленіи, этотъ вопросъ при помощи однихъ соображеній, нельзя думать о правильномъ ходѣ въ развитіи знанія, потому что исторія точныхъ наукъ показываетъ, что предубѣжденія ученыхъ неоднократно оказывались не больше какъ суевѣріемъ, то-есть неумышленною ложью. Для возможности дальнѣйшаго развитія ученія о сопротивленіи и для расширенія той области, изъ которой можно добывать полезныя опытныя данныя, необходимо рѣшить указанный вопросъ въ ту или другую сторону рядомъ положительныхъ наблюденій надъ сопротивленіемъ даннаго тѣла при движеніи его въ безграничной неподвижной средѣ и надъ тѣмъ давленіемъ, которое испытываетъ

Академия наук СССР
Физический ин-т
Библиотека

тоже тѣло неподвижное въ двигающейся средѣ (вода и воздухъ). Тѣ и другіе опыты могутъ быть произведены при помощи однихъ и тѣхъ же вѣсовъ или динамометровъ и, если бы только не былъ столь соблазнителенъ кажущійся вѣрнымъ, а въ сущности шаткій теоретическій путь изслѣдованія вопросовъ сопротивленія, навѣрное изслѣдованія этого рода были бы уже давно выполнены. Мнѣ кажется, при знакомствѣ съ развитіемъ изслѣдованій о сопротивленіи среды, что здѣсь болѣе, чѣмъ во многихъ другихъ частяхъ физико-механическихъ знаній, ясно сказалось такое обстоятельсство, которое часто проходитъ незамѣченнымъ при изученіи точныхъ знаній: примѣненіе математическаго анализа къ разработкѣ мало изслѣдованной области знаній придаетъ ей лживый образъ нѣкоторой законченности, отбивающей охоту отъ изученія предмета опытнымъ путемъ, потому что людямъ, привыкшимъ искать въ опытномъ методѣ рѣшенія задачъ и ждущимъ отъ природы прямого отвѣта на заданные вопросы,—такимъ людямъ, нерѣдко слабовладѣющимъ математическимъ анализомъ, кажется онъ способнымъ охватить всю сложность неизученнаго природнаго явленія и думается, что послѣ него дѣло и весь интересъ опыта состоитъ только въ провѣркѣ или опроверженіи теоріи. Лица же, владѣющія анализомъ, рѣдко имѣютъ способность и склонность сочинить и выполнить опытъ, могущій дать дѣльный отвѣтъ на вопросъ, заданный природѣ. Приложеніе этихъ соображеній видно во всей исторіи занимающаго насъ предмета. Особенно разителенъ долгій застой въ вопросѣ сопротивленія, послѣдовавшій за Ньютономъ. Почти цѣлое столѣтіе длилось то время, когда Ньютонъ со своей теоріей сопротивленія былъ единственнымъ авторитетомъ. Поэтому мы возвращаемся къ разбору ньютоновыхъ основныхъ положеній и пріемовъ.

Въ основной формулѣ сопротивленія (1) входитъ коэффиціентъ K, котораго значеніе само собою понятно. Это есть сопротивленіе въ томъ случаѣ: 1) когда вѣсъ куб. мѣры, напр. куб. метра, или плотность $\Delta=1$ вѣса, такова напр. при метрической системѣ плотность воздуха на нѣкоторой высотѣ, а именно напр. на такой, гдѣ давленіе $=590$ мм., температура $=0^\circ$, т. е., примѣрно сказать, на высотѣ 2000 метровъ отъ уровня моря; 2) когда M, то-есть плоскость наибольшаго поперечнаго сѣченія движущагося тѣла (напр. мидель корабля), равна единицѣ, то-есть, считая всѣ данныя по метрической системѣ, когда она равна 1 кв. метру; 3) когда скорость v движенія тѣла въ единицу времени, то-есть въ 1 секунду, равна единицѣ длины, то-есть одному метру и 4) когда синусъ угла встрѣчи$=1$, то-есть, когда тѣло оканчивается прямою плоскостью, перпендикулярною къ направленію движенія. Само собою разумѣется, что величину K можно и должно опредѣлить изъ опыта. Такъ обыкновенно и дѣлаютъ. Но, задавшись гипотезою Ньютона, эту величину можно также получить разсчетомъ [1]), какъ

[1]) См. 1-е и 2-е приложенія.

слѣдствіе примѣненія законовъ удара. Если *жидкость принять за* упругую, рѣдкую, но состоящую изъ *совершенно неупругихъ* частицъ, то разсчетъ приводитъ къ тому, что сопротивленіе пластинки, перпендикулярной къ направленію пути, равно вѣсу столба сопротивляющейся жидкости, который имѣетъ основаніемъ эту самую пластинку, а высота столба равняется двойной высотѣ соотвѣтствующей скорости при свободномъ паденіи тѣлъ. Законъ свободнаго паденія тѣлъ, какъ извѣстно, выражается равенствомъ.

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{gt^2}{2},$$

гдѣ H высота паденія по истеченіи времени t (число секундъ), v достигнутая тогда скорость и g ускореніе тяжести, для широты въ 45°, равное 9,78 метра, а для Петербурга=9,82 м. Поэтому сопротивленіе перпендикулярной току пластинки равно, при широтѣ 45°:

VI. . . . . $R = \Delta M 2H = \Delta M \frac{v^2}{g} = 0{,}102\ \Delta M v^2.$

Слѣдовательно, та величина, которую мы выше (I) назвали K, по этому предположенію равна 0,102. Долго и многіе признавали вѣрность такого заключенія, выводимаго изъ основныхъ положеній Ньютона, а потому и выражали сопротивленіе высотою столба, находимаго чрезъ дѣленіе наблюденнаго сопротивленія на вѣсъ кубич. единицъ жидкости и на величину плоскости, т. е. опредѣляли $\frac{R}{\Delta M}$ и сличали эту величину съ высотою H, отвѣчающею скорости. Но здѣсь является въ исторіи предмета чрезвычайно странное обстоятельство. При неупругихъ частицахъ и нормальной плоскости слѣдовало получать эту величину $= 2H$, при упругихъ частицахъ $= \frac{4}{3}H$, при сплошной жидкости $= \frac{1}{2}H$, судя по теоретическому выводу Ньютона, а считали опытъ согласнымъ съ теоріею Ньютона даже тогда, когда $\frac{R}{\Delta M} = H$, чего вовсе нѣтъ у Ньютона.

Достаточно для примѣра сослаться на отчетъ о знаменитыхъ для своего времени опытахъ французскихъ академиковъ Д'Аламбера, Кондорсе и Боссю: Nouvelles expériences sur la résistance des fluides 1777. На стр. 172 они приводятъ слѣдующій численный выводъ изъ своихъ опытовъ, производившихся въ водѣ.

Нумеръ опыта	1	12	20	34	48	6
Высота по наблюденію $= \frac{R}{\Delta M}$	0,99	1,32	1,28	1,01	1,43	1,14 дюйм.
» соотвѣт. скор. $\frac{v^2}{2g}$	1,08	1,39	1,19	1,03	1,47	0,84 »

Затѣмъ (стр. 175) Боссю (писавшій отчетъ) говоритъ: изъ этого сравненія видно, что высота, находимая изъ данныхъ опыта, и та, которая соотвѣтствуетъ скорости, такъ мало различаются между собою, что можно эту разность приписать неизбѣжнымъ погрѣшностямъ наблюденія и неполной точности поправокъ на тре-

ніе и сопротивленіе воздуха, необходимыхъ для полученія результата. А потому въ практическихъ примѣненіяхъ можно допустить: «что прямое (слова отчета) сопротивленіе плоской поверхности, движимой параллельно ей самой, по направленію ей нормальному, въ безграничной жидкости, равно вѣсу столба этой жидкости, имѣющаго основаніемъ самую движимую поверхность, а высотою ту, которая отвѣчаетъ скорости движенія». Согласіе съ теоріею Ньютона было въ томъ, что сопротивленіе, какъ и H, оказалось пропорціонально v^2 и вышло возрастающимъ съ площадью сѣченія, но оно вовсе не вышло равнымъ тому, котораго можно было ждать по теоріи, развитой Ньютономъ. Надо замѣтить далѣе—ни одинъ изъ опытовъ, затѣмъ произведенныхъ въ воздухѣ и водѣ, не далъ чиселъ сходныхъ ни съ вышеприведенными $\left(H = \frac{R}{\Delta M}\right)$, ни согласныхъ съ мнѣніемъ Ньютона. Всѣ сколько либо точные опыты даютъ сопротивленіе больше, чѣмъ слѣдуетъ по равенству $R=H\Delta M$, но меньше, чѣмъ по равенству $R = 2H\Delta M$ [1]). Но и такое обстоятельство не приводитъ въ затрудненіе нѣкоторыхъ послѣдователей Ньютонова мнѣнія, потому что, при предположеніи *совершенно упругихъ частицъ*, разсчетъ, по смыслу гипотезы, даетъ сопротивленіе вдвое больше, чѣмъ въ случаѣ неупругихъ тѣлъ (то-есть даетъ $R=4\Delta MH$). А какъ въ природѣ нѣтъ ни совершенно упругихъ, ни абсолютно твердыхъ или неупругихъ тѣлъ, то должно ждать, что сопротивленіе будетъ выражаться, по смыслу гипотезы объ ударѣ, нѣкоторою величиною:

$$R = K_1 \Delta MH = K_1 \Delta M \frac{v^2}{2g} = K_1\ 0{,}0511\ \Delta M v^2 \quad . \quad . \quad . \quad VII.$$

Здѣсь значеніе K_1 требуется узнать изъ опыта. Допустить это, собственно, значитъ—отвергнуть Ньютона, для котораго $K_1=4$ или 2 или $\frac{1}{2}$. Но именно такимъ образомъ выражаютъ сопротивленіе даже многіе изъ изслѣдователей послѣдняго времени. Достаточно сослаться на Понселе, который въ своемъ замѣчательномъ сочиненіи. Introduction à la Mecanique industrielle [2]), весьма подробно разбираетъ сопротивленіе среды. Дѣлая выводъ изъ всѣхъ разсмотрѣнныхъ имъ наблюденій надъ сопротивленіемъ плоскостей (стр. 629), Понселе говоритъ: «Основываясь на разнообразныхъ соображеніяхъ и ожидая новыхъ рѣшающихъ опытныхъ опредѣленій, мы предлагаемъ считать K_1 величиною, равною 1,30, для того случая, когда тѣло движется въ безграничной жидкости, находящейся въ покоѣ, а для того случая, когда тѣло остается въ покоѣ, жидкость же движется, предлагаемъ принять $K_1=1{,}85$» [3]).

[1]) Даже среднее изъ вышеприведенныхъ опытовъ даетъ для высоты наблюденной — величину 1,245 дюйма, средняя высота, отвѣчающая скорости, равна 1,167.

[2]) Первое изданіе 1829 г., второе 1839, третье, подъ редакціей Кретца, относится къ 1870 г. Это послѣднее изданіе мы только и имѣемъ въ виду, цитируя Понселе.

[3]) Такъ какъ $K_1 = 2Kg$, то по числамъ Понселе для движенія тѣла (въ

Нельзя согласиться съ тѣмъ способомъ, которымъ иные послѣдователи Ньютона объясняютъ введеніе коэффиціента $K_1 > 1 < 2$, то-есть признать зависимость этого коэффиціента отъ того, что природныя тѣла (частицы среды и самого движущагося тѣла) имѣютъ ограниченную упругость. Это потому, что упругость воздуха и воды, а также и разныхъ тѣлъ, въ нихъ движущихся, никакимъ образомъ нельзя признать одинаковою, а потому должно было бы ждать и различнаго значенія K_1 для каждаго частнаго случая, то-есть для каждой жидкости и для каждаго тѣла при той же формѣ (т. е. при тѣхъ же $\sin^2\alpha$); для воздуха, напримѣръ, можно было бы ждать значенія K_1 бо́льшаго, чѣмъ для воды. Этого однако въ дѣйствительности нѣтъ. Ньютонъ изъ своихъ опытовъ, которые мы въ своемъ мѣстѣ подробно разсмотримъ, заключилъ, что въ случаѣ шарообразнаго тѣла сопротивленіе воды и воздуха должно признать такимъ, какъ для сплошныхъ неупругихъ жидкостей. Это его удивляетъ, но онъ остается послѣдовательнымъ и принимаетъ то заключеніе, какое, казалось ему, даетъ опытъ для шара ($K = \frac{1}{2}$). Можно было, значитъ, думать, что самыя жидкости сплошь наполнены матеріею и что малѣйшія частицы жидкостей сами по себѣ неупруги. Это мыслимо, хотя и мало вѣроятно, потому что противорѣчитъ всѣмъ другимъ свойствамъ матеріи и совершенно недопустимо для газовъ. Если же оказывается $K_1 > 1$ и не равною 2, то ссылаться на несовершенную упругость значитъ вводить въ разсмотрѣніе такую гипотезу, по которой должно отказаться отъ возможности общаго рѣшенія вопроса и одно неопредѣленное свойство матеріи замѣнять другимъ, еще менѣе опредѣленнымъ.

Въ виду этихъ соображеній, а также и того обстоятельства, что численное значеніе K_1 не даетъ столь наглядно и прямо сопротивленія, какъ значеніе коэффиціента K (форм. I), мы во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи совершенно устраняемъ примѣненіе коэффиціента K_1 для высотъ, соотвѣтствующихъ скоростямъ. Но такъ какъ во многихъ сочиненіяхъ о сопротивленіи употребляются величины K_1, то напомнимъ только, что существуетъ слѣдующее соотношеніе между коэффиціентомъ K_1, соотвѣтствующимъ высотѣ столба, давящаго при сопротивленіи, и коэффиціентомъ K, выражающимъ силу сопротивленія при единицѣ скорости, плоскости и плотности, а именно:

VIII . . . . . $K_1 = 2Kg$,

гдѣ g есть напряженіе тяжести, близкое къ 9,82 метра.

Чтобы уяснить себѣ простѣйшимъ образомъ тотъ смыслъ, какой имѣетъ вышеприведенное значеніе теоретическаго коэфиціента ($2Kg = K_1 > 1 < 2$), можно разсуждать слѣдующимъ образомъ, совершенно оставляя въ сторонѣ представленіе объ ударѣ частицъ. Вообразимъ сосудъ, наполненный жидкостью до высоты H, плот-

---

форм. I) значеніе K близко къ 0,0662, если $g = 9{,}82$, а при движеніи жидкости K близко къ 0,0942, а потому для воды сопрот.$= 66Mv^2$ или $94Mv^2$ кило, для воздуха, считая $\Delta = 1{,}2$, сопрот.$= 79Mv^2$ или $113Mv^2$ граммовъ.

ность жидкости или вѣсъ куб. метра ея опять назовемъ Δ, а плоскость основанія M. Все давленіе жидкости на дно будетъ очевидно равно $HM\Delta$. Представимъ далѣе, что дно сосуда открылось или опустилось. Жидкость потечетъ изъ сосуда, станетъ падать. Законъ Торичелли, столь многократно провѣренный [1]), показываетъ, что скорость истеченія v при отверстіи будетъ такая же, какъ при паденіи съ высоты H, то есть $v=\sqrt{2gH}$. Слѣдовательно $H=\frac{v^2}{2g}$. Если дно сосуда приметъ на себя опять всю струю, то очевидно, что опять на него будетъ давить столбъ $HM\Delta$. Но этотъ вѣсъ выразитъ теперь сопротивленіе R, отвѣчающее скорости v. Откуда $R=HM\Delta=M\Delta\frac{v^2}{2g}$. Сличая это выраженіе съ I и VII, имѣемъ, что $K=\frac{1}{2g}$ или, что $K_1=1=2Kg$. Чтобы видѣть затѣмъ причину того, что въ дѣйствительности K_1 болѣе 1, достаточно вспомнить тотъ общеизвѣстный фактъ, что теченіе жидкости производитъ, напр. въ пульверизаторѣ или въ инжекторѣ Жиффара, разрѣженіе, а потому утекающая со дна жидкость по другую сторону дна произведетъ уменьшеніе давленія, а это увеличитъ сопротивленіе. И очевидно, что увеличеніе не дойдетъ до двойного, а будетъ меньше его, а потому $K_1>1<2$ [2]).

И такъ французскіе академики и во главѣ ихъ Боссю — признавали изъ своихъ опытовъ, что $2Kg=1$, по опытамъ же болѣе точнымъ, надо признать, что 2Kg болѣе 1, хотя и менѣе 2. Думалось найдти простое значеніе для коэф. сопротивленія, пришлось опереться на опытъ и изъ него извлечь нѣкоторое практическое значеніе коэф. сопротивленія. Это есть первое главное опытное опроверженіе воззрѣній Ньютона на сопротивленіе среды. Другое, еще болѣе ясное, видно въ томъ, что сопротивленіе оказалось по опыту вовсе непропорціональнымъ квадрату синуса угла встрѣчи α [3]).

Послѣ того, какъ въ 1775—1777 г. Д'Аламберъ, Кондорсе и Боссю произвели свои, исторически весьма важные, опыты надъ

---

[1]) Мнѣ кажутся особенно назидательными непосредственныя (1787 г.) опредѣленія, касающіяся удара вытекающей жидкости, сдѣланныя Боссю (Traité d'hydrodinamique T. II ch. XIV), который заставлялъ падать вытекающую жидкость на пластинку, прикрѣпленную къ одному плечу коромысла вѣсовъ, а на другомъ плечѣ измѣрялъ величину давленія грузомъ, и одни изъ новѣйшихъ опытовъ того же рода, сдѣланныхъ профес. Буффомъ (Poggendorff's Annalen T. CXXVII, p. 497), который ставилъ въ струю короткій конецъ обращеннаго сифона и показалъ, что въ открытомъ длинномъ концѣ сифона жидкость поднимается до уровня ея въ сосудѣ, изъ коего течетъ струя.

[2]) Я думалъ, что вышеприведенное объясненіе закона сопротивленія есть простѣйшее видоизмѣненіе Ньютонова катаракта и полагалъ, что оно является въ первый разъ, но нашелъ недавно у Хагена (Abhandl. d. Academie zu Berlin. 1874 стр. 28) подобное же толкованіе, хотя и снабженное ошибками и опечатками, извращающими смыслъ дѣла.

[3]) Замѣтимъ здѣсь, что иные считаютъ уголъ встрѣчи не между плоскостью и направленіемъ движенія, а дополнительный къ нему уголъ между нормалью плоскости и направленіемъ движенія. Тогда, очевидно, въ формулу взойдетъ cos вмѣсто sin.

сопротивленіемъ плавающихъ тѣлъ въ безграничной жидкости и въ узкихъ каналахъ, два послѣдніе изъ названныхъ изслѣдователей сдѣлали въ 1778 спеціальный рядъ изслѣдованій для опредѣленія вліянія угловъ встрѣчи на мѣру сопротивленія, чтобы убѣдиться въ примѣнимости закона $Sin^2\alpha$ къ дѣйствительности. Заключеніе, выведенное ими изъ 69 отдѣльныхъ опытовъ, есть слѣдующее, взятое мное изъ Traité théorique et experimental d'Hydrodynamique p. M. l'Abbé Bossut 1787, Tome II, p. 411.

«Таблица относительныхъ сопротивленій, испытываемыхъ плавающимъ тѣломъ при той же скорости, въ зависимости отъ измѣненія носоваго угла MQN (черт. 2) отъ 180 до 12 градусовъ».

Уголъ MQN	Уголъ встрѣчи.	Относительное сопротивленіе, считая сопротивленіе при $\alpha=90^\circ$ равнымъ 10000. По теоріи $= Sin^2\alpha$ 10000	По результатамъ опыта.	Разность.
180°	90°	10000	10000	—
168	84	9890	9893	3
156	78	9568	9578	10
144	72	9045	9084	39
132	66	8346	8446	100
120	60	7500	7710	210
108	54	6545	6925	380
96	48	5523	6148	625
84	42	4478	5433	955
72	36	3455	4800	1345
60	30	2500	4404	1904
48	24	1654	4240	2568
36	18	955	4142	3187
24	12	432	4063	3631
12	6	109	3999	3890

«Изъ этой таблицы видно (продолжаетъ Боссю), что въ дѣйствительности сопротивленіе измѣняется иначе, чѣмъ измѣняются квадраты синусовъ угловъ паденія: опытныя числа различаются отъ теоретическихъ тѣмъ болѣе, чѣмъ меньше становится уголъ паденія».

Позднѣйшіе опыты другихъ изслѣдователей, которые мы разсмотримъ впослѣдствіи съ подробностію, хотя даютъ иныя числа, чѣмъ эти, но заключеніе французскихъ академиковъ подтверждаютъ, то есть показываютъ отсутствіе пропорціональности между сопротивленіемъ и квадратомъ синуса угла паденія или встрѣчи.

Въ исторіи вопроса о сопротивленіи такое заключеніе было главнымъ поводомъ къ паденію Ньютоновой теоріи и къ розысканію новыхъ законовъ сопротивленія. Съ закономъ $Sin^2\alpha$ связана въ дѣйствительности вся сущность значенія ньютоновой теоріи, потому что для примѣненія законовъ сопротивленія къ случаямъ практики приходилось примѣнять начала теоріи къ тѣламъ

ограниченнымъ кривыми поверхностями, къ такимъ напримѣръ, какъ носъ корабля или шаровая поверхность ядра, а для вывода сопротивленія подобныхъ тѣлъ необходимо было задаться закономъ измѣненія сопротивленія, оказываемаго элементомъ поверхности при измѣненіи угла встрѣчи. Самъ Ньютонъ приложилъ свой законъ къ шару. Пользуясь слѣдующимъ общимъ пріемомъ, легко это произвести. Если законъ I (считая ли $2Kg=1$ или вообще считая K за величину постоянную) справедливъ для плоскостей конечнаго размѣра, то онъ, очевидно, выражаетъ законъ сопротивленія и безконечно малой, дифференціальной плоскости. А всякую кривую поверхность можно представить образованною изъ сопоставленія, по нѣкоторому закону, безконечно большаго количества такихъ площадокъ. Суммируя, то есть интегрируя, сопротивленіе всѣхъ этихъ площадокъ, можно вывести сопротивленіе тѣла, ограниченнаго кривыми поверхностями. Путь этотъ [1]) совершенно вѣренъ для случая удара и былъ бы вполнѣ приложимъ къ нахожденію сопротивленія кривыхъ поверхностей, зная сопротивленіе плоскостей, если бы сопротивленіе представляло дѣйствительное подобіе удару и если бы послѣ и кромѣ удара частицъ жидкости о тѣло не совершалось бы скольженія частицъ по поверхности тѣла, если бы не образовались токи и струи жидкости [2]) и если бы вообще не было взаимодѣйствія частицъ другъ на друга. А все это, конечно, существуетъ; поэтому сопротивленіе кривой поверхности будетъ въ дѣйствительности инымъ, чѣмъ сумма сопротивленій элементарныхъ площадокъ, на которыя можно разбить всякую поверхность. Поэтому вышеуказанный способъ нахожденія сопротивленія тѣлъ, ограниченныхъ изогнутыми поверхностями, не можетъ отвѣчать сущности явленія и выражать дѣйствительность.

И это тѣмъ болѣе справедливо, что самый законъ $Sin^2\alpha$, какъ мы видѣли выше, не соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Такое мнѣніе о неприложимости Ньютоновыхъ началъ къ нахожденію сопротивленій съ особою ясностію и рѣзкостію высказалъ прежде другихъ извѣстный ученый, Борда, капитанъ французскаго флота, который въ срединѣ прошлаго столѣтія славился, какъ замѣчательный

---

[1]) Подробности такого пріема, какъ и вообще развитіе нѣкоторыхъ частныхъ задачъ, касающихся сопротивленія, мы помѣщаемъ въ приложеніяхъ, чтобы избѣжать въ изложеніи общаго состоянія вопроса о сопротивленіи такихъ отступленій въ ходѣ мыслей читателя, которыя неизбѣжны при передачѣ математическихъ разсужденій и разсчетовъ. Здѣсь, въ этой главѣ, я желалъ сопоставить воззрѣнія и опыты, на сколько они вліяли на рѣшеніе задачъ сопротивленія.

[2]) Въ четвертомъ приложеніи къ этой книгѣ читатели найдутъ изложеніе теоріи Нордмарка (1808), который, принявъ во вниманіе треніе и измѣненіе скорости въ движеніи жидкости обтекающей тѣло, вознамѣрился исправить теорію Ньютона. У Нордмарка есть успѣхъ, онъ уже отчасти подчинился природѣ и требованіямъ опыта, но все же исходныя точки Нордмарка таковы, что его выводы имѣютъ лишь относительный, историческій, а не абсолютный интересъ.

ученый, и который навсегда оставилъ послѣ себя много изслѣдованій и пріемовъ, отличающихся большимъ изяществомъ и точностію. Борда въ 1763 году высказался совершенно ясно противу Ньютоновой теоріи сопротивленія, потому что всѣ его немногочисленные, но ясные опыты съ нею несогласны. Вышеупомянутые обширные опыты французскихъ академиковъ, произведенные въ слѣдующемъ десятилѣтіи, были несомнѣнно только отвѣтомъ на вопросы, возбужденные опытами Борда. Они описаны въ Histoire de l'Académie royal des sciences, avec les mémoires de Math. et de Physique. Année 1763: Expériences sur la résistance des fluides, par Chevalier de Borda (стр. 358). Этотъ мемуаръ заключаетъ описаніе опытовъ, произведенныхъ въ воздухѣ при помощи маховика, къ которому прикрѣплялись испытываемыя тѣла [1]). Горизонтальная ось маховика вращалась отъ дѣйствія груза и опредѣлялась скорость, лишь только она становилась постоянною, что и даетъ сопротивленіе [2]). Робинсъ въ Англіи раньше Борда, а именно ранѣе 1742 г., когда онъ публиковалъ свою New principles of Gunnery, первый примѣнилъ этотъ способъ опредѣленія, но такъ какъ онъ имѣлъ лишь надобность для цѣлей артиллеріи опредѣлить сопротивленіе шара въ воздудѣ, то его опыты и не были направлены къ той цѣли—провѣркѣ теоріи Ньютона—какую имѣлъ Борда и которая дѣлаетъ изслѣдованія этого послѣдняго особенно важными въ вопросѣ о сопротивленіи среды. Въ томъ же мемуарѣ Борда описываетъ опытъ съ кубомъ (черт. 26), который онъ двигалъ прямолинейно въ водѣ при помощи груза, опредѣляющаго сопротивленія. Борда въ 1767 г. (та же исторія академіи за 1767 г., стр. 495) публиковалъ второй мемуаръ, гдѣ описываетъ опыты въ водѣ, произведенные при помощи вращающагося маховика, насаженнаго на вертикальной оси (черт. 24). Пріемы Борда затѣмъ служили моделью во всѣхъ почти другихъ опытахъ надъ сопротивленіемъ воздуха и воды. Ваинсъ, Хуттонъ и Бофуа въ прошломъ столѣтіи. Тибо, Рыкачевъ, Хагенъ и др. въ нынѣшнемъ столѣтіи пользовались для опредѣленія сопротивленія воздуха пріемомъ Робинса и Борда, то есть вращающимися маховиками, а для опытовъ въ водѣ французскіе академики, Бофуа, Нордмаркъ, Чапманъ и др., примѣнили такой же пріемъ, какъ Борда для куба. Такъ съ изслѣдованій Борда начинается новый періодъ въ ученіи о сопротивленіи среды. Этотъ второй періодъ имѣлъ бы совершенно иное значеніе, если-бы, убѣдившись въ непрочности и невѣрности, по недостатку твердыхъ основныхъ положеній, рѣшенія задачъ путемъ математическаго анализа, изслѣдователи того времени постарались прямо изъ ряда опытныхъ данныхъ извлечь какіе-либо общіе выводы, могущіе служить поводомъ для дальнѣйшихъ попытокъ овладѣть предметомъ. А въ замѣнъ этого случилось слѣдующее. Опытами по-

[1]) См. листъ 3, черт. 19.

[2]) См. слѣдующую главу, гдѣ даются практическіе результаты и описываются методы опытныхъ изслѣдованій.

казывалась невѣрность принятаго. Его должно было отвергнуть. А его одни старались поправить, другіе старались замѣнить несостоятельныя и произвольныя гипотезы другими, такими же произвольными, а потому и несостоятельными, третьи же довольствовались числами опыта и дальше идти не желали, не желали никакихъ обобщеній. Къ числу этихъ послѣднихъ принадлежалъ самъ Борда. Онъ вывелъ изъ своихъ опытовъ: 1) что сопротивленіе квадратной пластинки, въ 9×9 дюймовъ, движущейся въ направленіи своей нормали, при скорости 10,66 фут. въ секунду, равно 0,1547 фунта, а по ньютоновой теоріи оно должно быть 0,0932; 2) что сопротивленіе растетъ быстрѣе, чѣмъ величина плоскости пластинки; 3) что сопротивленіе шара относится къ сопротивленію его большаго круга, какъ 1:2,44 въ воздухѣ или какъ 1:2,508 въ водѣ, тогда какъ теорія Ньютона требуетъ отношенія 1:2 [1]); 4) что сопротивленіе коническихъ тѣлъ слѣдуетъ скорѣе закону первой степени синусовъ, чѣмъ квадрату синусовъ, какъ признаетъ теорія; 5) что для кривыхъ поверхностей дѣйствительное сопротивленіе менѣе вычисляемаго на основаніи теоріи по измѣненію угловъ уклона и т. д. Словомъ, онъ показалъ, что во всѣхъ пунктахъ теорія Ньютона грѣшитъ, но больше ничего не сдѣлалъ, не поискалъ какой-либо связи между своими наблюденіями. При такомъ отношеніи къ предмету является, какъ неизбѣжное слѣдствіе, отсутствіе всякой научной критики. основанной на тѣхъ или другихъ обобщающихъ соображеніяхъ, которыхъ требуетъ и всякое опытное изслѣдованіе, какъ и каждое теоретическое изученіе; то есть Борда не стремился сличать и провѣрять, разбирать и сопоставлять собственные свои опыты, а бралъ ихъ, какъ есть, съ полнымъ довѣріемъ. Такъ—можно счесть единичный опытъ, не могущій никогда считаться совершенно достовѣрнымъ, за рѣшающій дѣло. Вмѣсто ошибки теоретической, тогда легко впасть въ другую, не менѣе важную—въ ошибку опытнаго даннаго. Въ примѣненіи къ методу изслѣдованій Борда это особенно полезно замѣтить, потому что круговращеніе сопротивляющихся тѣлъ влечетъ за собою развитіе центробѣжныхъ силъ, и было необходимо прямыми изслѣдованіями убѣдиться въ достоинствѣ чиселъ, получающихся этимъ способомъ, сравнить ихъ съ числами, полученными при прямолинейномъ движеніи, предполагаемомъ въ теоріи и наиболѣе важномъ для практики. Отсутствіе какого-либо положительнаго вывода изъ опытовъ Борда [2]) и отсутствіе критиче-

[1]) И это справедливо только для несплошной жидкости, для такой же сплошной, какою можно считать воду, Ньютоновъ выводъ даетъ совершенно немыслимое, показывая, что сопротивленія шара и цилиндра при одномъ радіусѣ равны.

[2]) За такой выводъ нельзя считать то заключеніе, что сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, потому что этотъ опытный выводъ выводится тоже изъ опытовъ Ньютона надъ паденіемъ тѣлъ въ водѣ и воздухѣ и, при малой опытной разности скоростей, не имѣетъ силы достаточной для твердаго убѣжденія въ общности начала.

скаго отношенія къ принятому способу изслѣдованія, съ одной стороны, заставляетъ несовершенно довѣрять ни теоріи, ни опыту, а съ другой, усложняетъ, а не облегчаетъ дѣло послѣдующихъ изслѣдованій, потому что—на ихъ долю остается вновь провѣрять теорію, да еще и повторять и объяснять опыты прежнихъ изслѣдователей. Такова уже трудность задачи сопротивленія, что даже такой остроумный изслѣдователь, какъ Борда, не рѣшается въ ней дѣлать своихъ собственныхъ шаговъ, довольствуясь указаніемъ на то, что шаги другихъ—невѣрны. Но, конечно, лучше видѣть только невѣрность принятаго, чѣмъ вѣрить невѣрному, лучше признавать нерѣшеннымъ вопросъ, чѣмъ рѣшать его ложно, хотя истинное движеніе впередъ должно ставить на мѣсто отвергаемаго что-либо новое—иначе будетъ возвратное движеніе знанія, а не прогрессивное. Такъ и понимали вопросъ сопротивленія другіе два французскіе изслѣдователя конца прошлаго столѣтія, и они имѣли за то много послѣдователей, вложили въ ученіе о сопротивленіи новые элементы, съ которыми, во всякомъ случаѣ, придется вѣдаться, когда будетъ вновь строиться ученіе о сопротивленіи среды. Эти два изслѣдователя носятъ такіе же громкіе имена, какъ Борда, Боссю, Кондорсе, д'Аламберъ, и также принадлежатъ къ семьѣ знаменитыхъ дѣятелей французской науки въ концѣ прошлаго столѣтія: это—Кулонъ (Coulomb) и Дю-Буа (Du Buat).

Изобрѣтатель крутильныхъ вѣсовъ, принципъ которыхъ съ тѣхъ поръ примѣняется во многихъ тончайшихъ физическихъ изслѣдованіяхъ, примѣнилъ изученные имъ законы кручения проволокъ къ рѣшенію слѣдующаго вопроса изъ задачъ о сопротивленіи: зависитъ-ли отъ скорости и отъ какой степени ея та часть сопротивленія, которая происходитъ отъ прилипанія, сцѣпленія, липкости и вязкости жидкостей и которая можетъ быть названа треніемъ, то-есть силою, дѣйствующею преимущественно на плоскости паралельныя направленію движенія, а не на нормальныя къ нему, испытывающія преимущественно прямое сопротивленіе, опредѣляемое, по ньютоновой гипотезѣ, инерціею жидкости? Вопросъ поставленъ такъ прямо и ясно, что одна его постановка есть уже важный шагъ во всемъ ученіи о сопротивленіи. И Ньютонъ, и Боссю, и всѣ предшественники Кулона, конечно, понимали, что треніе играетъ роль въ сопротивленіи, но признавали величину тренія ничтожною сравнительно съ величиною прямаго сопротивленія, происходящаго отъ инерціи. Д'Аламберъ, Кондорсе и Боссю въ своихъ изслѣдованіяхъ, уже выше упомянутыхъ, старались убѣдиться въ малости тренія. Достаточно упомянуть слѣдующій ихъ выводъ изъ опыта: при удлиненіи движущейся въ водѣ призмы сопротивленіе не возрастаетъ, а даже уменьшается. Отчего происходитъ это уменьшеніе—это вопросъ другой, но, во всякомъ случаѣ, еслибы треніе было значительно, оно бы увеличило сопротивленіе при удлиненіи призмы. Французскіе академики заключили изъ этого, что треніе во всякомъ случаѣ должно быть силою,

мало измѣняющею сопротивленіе. Это заключеніе такое же, какъ и Ньютона, даже простое повтореніе его словъ. Кулонъ отрѣшился отъ этой части Ньютонова мнѣнія, хотя и находится еще подъ его вліяніемъ. Видно это изъ того, что Ньютонъ все ученіе о сопротивленіи (помѣщенное во 2-й части его Principia) дѣлитъ на главы: въ первой разсматриваетъ случай пропорціональности первой степени скорости, во второй главѣ — квадрату скорости, въ третьей — ихъ суммѣ. Кулонъ признаетъ съ Ньютономъ, что прямое сопротивленіе, происходящее отъ инерціи, зависитъ отъ квадрата скорости, но признаетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что сопротивленіе выражается суммою двумя членовъ av^2+bv, изъ которыхъ одинъ есть av^2, зависящій отъ инерціи, а другой есть bv, зависящій отъ тренія [1]). Далѣе онъ вводитъ такое представленіе, удержавшееся затѣмъ во многихъ, если не во всѣхъ сочиненіяхъ о сопротивленіи: когда скорости v — малы, членъ bv играетъ большую роль, его значеніе преобладаетъ въ выраженіи величины сопротивленія, когда же скорости велики, то этотъ членъ ничтожно малъ предъ членомъ av^2, а потому тогда все сопротивленіе можно выразить этимъ однимъ членомъ. Это нововведеніе такъ просто и такъ согласно съ выводомъ изъ его опытовъ, что невольно удерживается въ наукѣ. Впрочемъ, важнѣе, чѣмъ вышеуказанная, та часть работы Кулона, гдѣ онъ является экспериментаторомъ и даетъ пріемъ опредѣленія члена bv, зависящаго отъ первой степени скорости и выражающаго одно треніе безъ инерціи.

Въ первомъ рядѣ своихъ наблюденій Кулонъ опредѣлялъ сопротивленіе цѣльныхъ (сплошныхъ) горизонтальныхъ круговъ, качающихся около своего центра и остающихся при-этомъ въ первоначальной своей плоскости. Круглая пластинка, судя поэтому, не перемѣщала частицъ среды, то-есть, не производила ударовъ о среду, и не давала повода инерціи принять участіе въ сопротивленіи [2]). Однако, сопротивленіе и въ этомъ случаѣ существуетъ и выражается уменьшеніемъ амплитудъ колебаній и, такъ называемымъ, логарифмическимъ декрементомъ. Задерживающая сила при-этомъ будетъ, очевидно, ничто иное, какъ треніе (тотъ родъ его, который нынѣ называется внутреннимъ треніемъ), зависящее отъ вязкости и др. силъ, дѣйствующихъ между скоро двигающимися вслѣдъ за кругомъ частицами жидкости, прилипшей къ качающемуся кругу, и остальною массою жидкости, все мед-

[1]) Способъ качанія маятника въ воздухѣ и въ жидкостяхъ, примѣненный уже для подобной цѣли Ньютономъ, привелъ его къ выраженію сопротивленія суммою $av^2+bv^{3}/_{2}+cv$. Тѣже опытныя числа Бернулли выразилъ одною суммою av^2+b, какъ то принимаетъ Ньютонъ для случая паденія въ водѣ и воздухѣ, считая, повидимому, треніе жидкостей (членъ b) независящимъ отъ скорости. Сгравезандъ примѣнилъ для выраженія сопротивленія движущагося тѣла такое же выраженіе av^2+b, а для того случая, когда движется жидкость, давленіе на неподвижное тѣло выразилъ суммою av^2+bv.

[2]) См. листъ 1, черт. 5-й, гдѣ изображенъ приборъ Кулона и гдѣ онъ кратко описанъ.

леннѣе и медленнѣе двигающеюся по мѣрѣ удаленія отъ круга. Это тотъ самый пріемъ, какимъ въ новѣйшее время Максвель, Мейеръ и др. опредѣляютъ внутреннее треніе воздуха, столь важное, какъ доказательство господствующей механической теоріи газовъ, то самое треніе, которое сдужитъ причиною образованія вихревыхъ колецъ и многихъ др. явленій. Сущность пріемовъ наблюденія очевидна будетъ изъ слѣдующаго примѣра. Былъ взятъ дискъ (кругъ), діаметръ его 195 мм. Привѣшенный за центръ къ длинной тонкой проволокѣ (приборъ изображенъ на листѣ 1, черт. 5), онъ былъ погруженъ въ воду (или затѣмъ въ масло) и, какъ въ крутильныхъ вѣсахъ, колебался, начиная отъ 0° до 192° уклона (вся окружность раздѣлена была на 480°). Послѣ десяти колебаній (полукачаній или размаховъ) амплитуда колебанія была всего 52,°3. Логарифмъ 192=2,2833, а log. 52,3=1,7185. Разность логарифмовъ дѣленная на 10=0,0565. Тотъ же кругъ, начавшій качаться отъ 0° до 13°,8, послѣ десяти колебаній качался до 3°,3. Логарифмическій декрементъ колебаній почти тотъ же 0,0571. Время 4 колебаній = 97 секундъ [1]). Когда кругъ (очень легкій) былъ снятъ и качанія наблюдались надъ остальными (тяжелыми) частями прибора, прикрѣпленными къ проволокѣ, то время 4 колебаній было=91″, а средній декрементъ 0,0058. Кулонъ произвелъ рядъ подобныхъ опредѣленій съ разными дисками въ водѣ и маслѣ и вывелъ: 1) что липкость или треніе, дѣйствующее въ вышеприведенныхъ опытахъ, въ 17,5 разъ больше для масла, чѣмъ для воды; 2) что смазанные саломъ круги качаются въ тѣ же времена, и представляютъ ту же убыль колебаній, что заставляетъ признавать треніе независящимъ отъ поверхности твердаго тѣла, а происходящимъ отъ взаимнодѣйствія жидкихъ частицъ другъ на друга, и 3) что подъ разными давленіями (въ безвоздушномъ пространствѣ, около поверхности жидкости и на глубинѣ 50 сантиметровъ подъ атмосфернымъ давленіемъ) сопротивленіе, пропорціональное скорости, не измѣняется, то-есть, глубоко отличается отъ тренія твердыхъ тѣлъ, такъ какъ послѣднее не зависитъ отъ скорости, а возрастаетъ съ давленіемъ.

Послѣ того Кулонъ заставлялъ въ водѣ и маслѣ колебаться цилиндры разныхъ діаметровъ и величинъ. Здѣсь кромѣ того тренія, которое дѣйствовало въ предшествующихъ опытахъ, являлось прямое сопротивленіе, зависящее отъ квадрата скорости. Тогда уже не получался, какъ въ предшествующихъ опытахъ, постоянный декрементъ и опыты пришлось разсчитывать, принявъ для ихъ выраженія формулу av^2+bv. Для масла и воды значеніе множителя b, зависящаго отъ первой степени скорости, получилось по своему отношенію тоже, какъ и въ опытахъ съ кругами. Коэффиціентъ же a при квадратѣ скорости вышелъ для масла почти тотъ же (а именно, немного менѣе), какъ и для воды, что Ку-

[1]) Качанія здѣсь, какъ извѣстно, также подчиняются закону изохронизма, какъ и въ маятникѣ, а потому время одного колебанія почти не зависитъ отъ амплитуды.

лонъ и объясняетъ тѣмъ, что членъ av^2 выражаетъ инерцію, а потому и долженъ представлять для масла и воды то отношеніе, какое имѣютъ ихъ плотности.

Если бы опыты Кулона относились не къ случаю круговаго движенія, а къ прямолинейному, были произведены при постоянной скорости, а не при перемѣнной, какъ въ маятникѣ [1]), если бы сверхъ того важнѣйшій его выводъ (треніе пропорціонально 1-й степени скорости) можно было, при современномъ запасѣ свѣдѣній, помирить съ фактами, добытыми другими изслѣдователями (Бофуа и Фроудъ показали, что треніе зависитъ отъ скорости въ степени близкой ко второй), то они бы имѣли сами по себѣ громадное практическое значеніе въ вопросѣ сопротивленія среды. Нынѣ же имъ нельзя придать другаго большаго и существеннаго значенія, кромѣ историческаго, потому, главнымъ образомъ, что при колебаніяхъ скорости въ разныхъ частяхъ пути не одинаковы ни для частей качанія, ни для разныхъ, убывающихъ по размаху, качаній. Такой случай перемѣнныхъ скоростей долженъ служить поводомъ къ сильному измѣненію мѣры всякаго сопротивленія, подобно тому какъ треніе измѣняется при началѣ движенія. Надо думать, что именно по этой причинѣ (непостоянству скоростей) опыты Кулона расходятся со всѣми другими позднѣйшими опредѣленіями, касающимися участія тренія въ сопротивленіи. Тѣмъ не менѣе опыты и воззрѣнія Кулона были весьма важны въ исторіи сопротивленія среды, потому что съ тѣхъ поръ на треніе стали смотрѣть, какъ на измѣримую долю сопротивленія, стали его разсчитывать и дошли до того даже, что имъ однимъ старались объяснить все сопротивленіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ то видимъ во взглядахъ Стокса, Ранкина и Фроуда. Значеніе опытовъ Кулона еще увеличивается потому, что онъ первый далъ матеріалъ и пріемы для опредѣленія той, характеризующей каждую жидкость, постоянной величины, которую Стоксъ, Максвель, Мейеръ и др. называютъ нынѣ внутреннимъ треніемъ. Цитированные опыты Кулона служили Стоксу (1850) исходомъ для выводовъ объ этомъ предметѣ.

Другой изслѣдователь сопротивленія среды—Дю-Бюа, также какъ и Кулонъ, принявъ выводы Борда, Боссю и др. о невѣрности Ньютоновой теоріи, пытается опытнымъ способомъ установить новыя начала въ ученіи о сопротивленіи. Наблюдатель и вообще изслѣдователь остроумный и усидчивый—Дю-Бюа произвелъ ряды опытовъ, относящихся къ движенію воды и ея сопротивленію, изложенныхъ имъ въ книгѣ, носящей названіе Principes d'Hydraulique [2]). Это дѣйствительно *начала* гидравлики, за

[1]) Можно сочинить такое расположеніе прибора, что скорость будетъ постоянна (вращать диски падающимъ на шнурѣ грузомъ, производя измѣренія только тогда, когда скорость паденія будетъ постоянна), а потому мнѣ удивительно, что до сихъ поръ такіе опыты не воспроизведены.

[2]) У меня подъ руками 2-ое изданіе этого сочиненія (nouvelle édition, revue et considérablement augmentée, какъ значится на заголовкѣ), явившееся

которыми слѣдуютъ всѣ дальнѣйшіе авторы сочиненій по этому предмету. Большая часть втораго тома этого сочиненія посвящается сопротивленію жидкостей. Вотъ какъ, въ предисловіи, самъ Дю-Бюа характеризуетъ свое отношеніе къ вопросу (discours preliminaire, p. XXXVII). «Послѣдняя часть сочиненія содержитъ нашъ опытъ о сопротивленіи жидкостей: здѣсь совершенно новымъ способомъ мы разсматриваемъ въ двухъ отдѣлахъ сопротивленіе воды и воздуха, не пользуясь вовсе прежнею теоріею, которая оказалась столько разъ противорѣчащею опыту, и стараясь отыскать въ опытахъ, до насъ не имѣвшихся, новыя точки зрѣнія на предметъ».

«Нельзя не удивляться тому, что въ столь просвѣщенный вѣкъ (XVIII), знаютъ такъ мало о сопротивленіи жидкостей и что, пользуясь ежедневно воздухомъ и водою для движенія машинъ и кораблей, мы не имѣемъ чего либо одного—или большаго запаса опытныхъ данныхъ, если теорія оказывается сложною, или лучшей теоріи, которая должна быть плодомъ опытнаго знанія предмета».

«Мы считаемъ себя счастливымъ уже тѣмъ, что намъ удалось разложить сопротивленіе, испытываемое движущимся тѣломъ въ жидкости, на два различныя усилія: одно, дѣйствующее какъ давленіе на переднюю часть тѣла, а другое какъ недостатокъ давленія сзади. Первое постоянно, если величина и форма передней части тѣла сохраняются. Второе измѣняется съ длиною тѣла и всегда уменьшается съ возрастаніемъ длины, независимо отъ кормовой формы, которая также вліяетъ на величину задняго недавленія (non-pression). Сумма этихъ двухъ усилій почти пропорціональна квадрату скорости, пока она не превышаетъ 3—4 фута въ секунду для воды и 20—24 фута для движенія въ воздухѣ. За этимъ предѣломъ недавленіе возрастаетъ быстрѣе, чѣмъ квадратъ скорости, тогда какъ носовое давленіе остается ему пропорціональнымъ. Тѣло испытываетъ меньшее сопротивленіе, двигаясь въ покоющейся жидкости, чѣмъ тогда, когда сопротивляется напору жидкости движущейся на него. Переднее давленіе на плоскость, движущуюся въ жидкости, или принимающую ея удары, не одинаково на всѣхъ точкахъ поверхности: оно уменьшается отъ средины къ окружности. Это явленіе, кажущееся столь страннымъ, есть только слѣдствіе основнаго начала, проявляющагося въ сопротивленіи, а именно: боковое давленіе движущейся жидкости всегда равно давленію покойной жидкости безъ давленія, соотвѣтствующаго высотѣ отвѣчающей скорости, съ какою движется жидкость».

«Прямые и хорошо провѣренные опыты показали намъ зависимость между скоростью и давленіемъ и недавленіемъ, или суммою сопротивленія, являющагося при движеніи тѣла или жидкости для плоскихъ поверхностей, кубовъ и призмъ. Опыты Ньютона даютъ сопротивленія шаровъ; но новый способъ разсмотрѣнія явленій

въ 1786 году. Очевидно, что опыты Борда вызвали всѣ эти труды французовъ о сопротивленіи.

такъ чуждъ всякой теоріи, что неизвѣстно болѣе такихъ началъ, которыя могли бы служить для опредѣленія сопротивленія наклонной плоскости. Другой родъ опытовъ кажется, однако, могущимъ пролить нѣкоторый свѣтъ на такую важную задачу. Всякое тѣло, движущееся въ жидкости, сообщаетъ свое движеніе такой части самой жидкости, которая измѣняется съ очертаньемъ и объемомъ тѣла: часть жидкости толкается тѣломъ передъ собою, другая слѣдуетъ за нимъ сзади. Наибольшее (миделевое) сѣченіе тѣла, къ которому, обыкновенно, относятъ ударъ, составляетъ, повидимому, основаніе, на которое опираются увлекаемые объемы жидкости. Чѣмъ больше эти объемы, тѣмъ, повидимому, дальше отъ наибольшаго сѣченія уклоняется жидкость, тѣмъ слабѣе становится ударъ. Поэтому, чѣмъ больше сумма объемовъ тѣла и увлекаемой имъ жидкости, тѣмъ, при равныхъ наибольшихъ сѣченіяхъ тѣла, сопротивленіе меньше. Тонкая пластинка завлекаетъ наименьшій объемъ жидкости, и потому представляетъ и наибольшее сопротивленіе. Заостренное тѣло, большей или меньшей длины, для котораго тонкая пластинка представляетъ площадь наибольшаго сѣченія, испытываетъ тѣмъ менѣе сопротивленія, чѣмъ больше длина. И то же самое относится ко всякимъ правильнымъ формамъ и тѣламъ вращенія. Если бы каждый разъ можно было знать сумму объемовъ тѣла и увлекаемой имъ жидкости, можно было бы знать и отношеніе сопротивленій, которыя обратно пропорціональны объемамъ. Изъ нашего сочиненія видно, что такое представленіе согласно съ опытами. Заставляя качаться въ водѣ тѣла различныхъ правильныхъ формъ, можно узнать сколько они увлекаютъ въ своемъ движеніи жидкости, пользуясь для этого наблюденіями временъ качанія при разныхъ длинахъ маятниковъ. Сверхъ того должно замѣтить, что подобныя тѣла представляютъ сопротивленія, пропорціональныя квадрату своихъ соотвѣтствующихъ боковыхъ линій и квадрату скоростей, и что этотъ законъ одинаково справедливъ для воды и для воздуха, если тѣло въ нихъ совершенно погружено. Также можно изъ опытовъ надъ сопротивленіемъ въ одной изъ этихъ двухъ жидкостей судить о сопротивленіи въ другой, пользуясь знаніемъ отношенія ихъ плотностей, какъ мы съ точностью доказываемъ опытами. Всѣ эти изслѣдованія даютъ, по крайней мѣрѣ, величину прямого сопротивленія и указываютъ путь для розысканія сопротивленія косвеннаго».

«Предшествующее приложимо только къ тѣмъ обычнымъ скоростямъ, которыя примѣняются въ дѣйствительности. Но для такихъ быстрыхъ движеній, каковы, напримѣръ, движенія артиллерійскихъ снарядовъ, мы показываемъ, что сопротивленія возрастаютъ быстрѣе, чѣмъ квадраты скоростей. Это возрастаніе ограничивается такою скоростію, когда сзади тѣла образуется пустота: начиная отсюда, при увеличеніи скоростей, сопротивленіе растетъ медленнѣе, чѣмъ квадраты скорости».

Таковы выводы Дю-Бюа. Нѣтъ нужды описывать и перечислять

всѣ подробности его наблюденій. Слѣдуетъ только указать главные способы и численные результаты его наблюденій. Но предварительно необходимо обратить вниманіе на то, какъ много самостоятельности показалъ этотъ изслѣдователь, съумѣвшій отрѣшиться отъ господствовавшаго представленія. За то онъ можетъ гордиться тѣмъ, что увлекъ за собою, за своимъ ученіемъ о носовомъ давленіи и кормовомъ недавленіи—множество дальнѣйшихъ изслѣдователей. Дюшеменъ, въ своемъ обширномъ сочиненіи: Recherches experimentales sur les lois de la résistance des fluides (par M. le Colonel Duchemin, extrait du Mémorial d'Artillerie, T. V, Paris, 1842), переведенномъ и на нѣмецкій языкъ, перепечатанномъ и въ Бельгіи и цитируемомъ понынѣ всегда, когда рѣчь зайдетъ о выводахъ ученія о сопротивленіи,—Дюшеменъ вполнѣ принялъ ученіе Дю-Бюа объ этомъ предметѣ и сдѣлалъ его популярнымъ. Современникъ Дю-Бюа—Роммъ, въ запискахъ парижской академіи (1764) и въ сочиненіи о морскомъ искусствѣ, переведенномъ на всѣ почти языки (включая и русскій), описываетъ опыты такого же рода, какъ у Дю-Бюа, и держится, въ сущности (хотя не по формѣ), тѣхъ же началъ, какъ этотъ послѣдній, доводя свои слѣдствія до крайняго и совершенно ложнаго положенія (основаннаго на опытахъ, очевидно неточныхъ), состоящаго въ томъ, что сопротивленіе корабля зависитъ только отъ его миделя, а не отъ обводовъ носа и кормы, если послѣдніе не представляютъ очень грубыхъ разностей и отвѣчаютъ одинаковой длинѣ. Навье, родоначальникъ современной школы французскихъ инженеровъ-механиковъ, въ своемъ общеизвѣстномъ сочиненіи: «Résumé des leçons sur l'application de la mécanique etc.» и въ другихъ своихъ изслѣдованіяхъ, прямо слѣдуетъ за Дю-Бюа, опредѣляя $R=\Delta M\,(m+n)\frac{v^2}{2g}$, гдѣ m и n численные, опытные коэффиціенты, постоянные для подобныхъ тѣлъ, измѣняющіеся съ перемѣною обводовъ и выражающіе цифру передняго давленія и кормоваго недавленія. Понселе, Буржуа и многіе другіе французы, въ существенныхъ частяхъ изложенія, слѣдуютъ за Навье. Англичане приняли также основную мысль Дю-Бюа и стали дѣлить все сопротивленіе на кормовое и носовое, что особенно ясно видно въ изслѣдованіяхъ Бофуа, о которыхъ намъ придется много говорить впослѣдствіи. Бофуа, произведшій много новыхъ и важныхъ для дѣла опредѣленій сопротивленія, разбирая результаты своихъ измѣреній, все сопротивленіе каждаго отдѣльнаго тѣла дѣлитъ (вычтя треніе) на Plus and Minus Pressure, то есть совершенно такъ, какъ Дю-Бюа, хотя методы нахожденія этихъ отдѣльныхъ слагаемыхъ у нихъ и весьма различны.

Такъ отъ Дю-Бюа ведетъ начало цѣлое новое ученіе о сопротивленіи, ученіе глубоко отличающееся отъ Ньютонова, и представляющее характернымъ своимъ признакомъ—стремленіе изойдти изъ опыта для рѣшенія задачъ сопротивленія. Однимъ изъ важныхъ и рѣзкихъ различій Дю-Бюа отъ предшественниковъ должно считать

выясненіе роли кормы, т. е. части, слѣдующей за миделемъ. Ньютону, Эйлеру и мн. др., бравшимся столь напрасно за теорію сопротивленія—было не ясно то вліяніе кормы на сопротивленіе, которое практика мореходнаго дѣла дѣлаетъ столь очевиднымъ. Дю-Бюа первый ясно созналь, старался выразить и объяснить и вліяніе тренія, и вліяніе длины, и много другихъ подробностей ученія о сопротивленіи. Оттого мнѣ кажется, что этотъ изслѣдователь есть первый зачинатель правильнаго рѣшенія задачъ сопротивленія. За нимъ послѣдовали, его мысли подхватили многіе, но его силы не было у послѣдователей, они не съумѣли продолжать новый опытный путь, сбили на болѣе торную дорогу и кончили тѣмъ, что сбились съ новаго пути опять на старый.

Главною особенностію изслѣдованій Дю-Бюа служитъ примѣненіе трубки Пито для отысканія законовъ сопротивленія.

Пито (Pitot), почти современникъ Дю-Бюа, предложилъ Парижской Академіи въ 1753 г. для измѣренія скорости теченія рѣкъ приборъ, носящій съ тѣхъ поръ его имя: трубка Пито. Это простѣйшій и остроумнѣйшій приборъ. Трубка, открытая съ обоихъ концовъ и загнутая подъ прямымъ угломъ, погружается вертикально въ рѣку такъ, чтобы отверстіе горизонтальной вѣтви было направлено противу теченія. Тогда вода поднимается въ вертикальной вѣтви выше уровня [1]). Высота поднятія воды въ трубкѣ Пито пропорціональна квадрату скорости, какъ и высота, отвѣчающая скорости при свободномъ паденіи.

Приборъ Пито былъ примѣненъ Дю-Бюа для своихъ изслѣдованій. Имъ онъ опредѣлялъ носовое давленіе и кормовое недавленіе. Вмѣсто прямаго наблюденія вышеописанною трубкою

---

[1]) Для опредѣленія уровня Пито присовокупляетъ другую вертикальную незагнутую трубку—это недостатокъ первичнаго устройства, потому что въ этой трубкѣ уровень воды ниже обычнаго уровня (по капиллярности) и наблюдать его неудобно. Видоизмѣненія трубки Пито, предложенныя впослѣдствіи для опредѣленія скорости теченія рѣкъ или скорости хода судовъ, представляютъ также двѣ трубки, одна съ отверстіемъ, направленнымъ противу теченія, другая съ отверстіемъ, направленнымъ внизъ или взадъ. Въ первой, при движеніи, вода поднимается, во второй опускается. Разность высотъ служитъ мѣрою скорости воды или судна. Чтобы наблюденіе было возможно и удобно, обѣ трубки соединяются вверху, и изъ нихъ обѣихъ вытягивается часть воздуха. Оттого, оба уровня воды въ трубкахъ поднимаются до желаемой высоты. Такое приспособленіе дѣлаетъ приборъ удобнымъ для опредѣленія скорости хода судовъ и, по моему предложенію, В. П. Верховскій и В. А. Куприяновъ, лѣтомъ 1879 г., испробовали подобной приборъ на одномъ изъ миноносныхъ судовъ. Для этого на носу парохода прикрѣплялся шестъ, спускающійся въ воду, и къ этому шесту прикрѣплена была круглая цилиндрическая коробка съ поперечною перегородкою. Ось цилиндрической коробки направляется горизонтально, по оси парохода. Два дна (переднее и заднее) и перегородка перпендикулярны къ направленію пути. Въ плоскомъ, переднемъ, кругломъ днѣ коробки, обращенномъ къ наружи, сдѣлано въ срединѣ тонкое отверстіе. Такое же въ заднемъ днѣ коробки. Изъ передняго и задняго отдѣленія коробки идутъ трубки, доходящія до манометра или указателя уровней, снаряженнаго насосомъ для разрѣженія воздуха. Разность уровней опредѣлялась

разностей высотъ близъ водяной поверхности, что очень неудобно, Дю-Бюа дѣлалъ трубку изъ жести и въ нее пускалъ поплавокъ съ выдающимся стержнемъ, движущимся, при поднятіи уровня воды, въ трубкѣ. Замѣчая на шкалѣ стояніе поплавка, какъ въ то

дѣленіями; 20 дѣленій=510 мм., скорость хода числомъ оборотовъ машины, а ранѣе было извѣстно отношеніе числа оборотовъ къ скорости. Привожу полученные результаты, въ среднихъ числахъ изъ 40 наблюденій:

Число наблюденій.	Число оборотовъ машины.	Средняя величина разности уровней.	Скорость въ узлахъ (въ мор. миляхъ) въ часъ.	Скорость въ метрахъ въ секунду по урав: $v = 0{,}025\ n - 0{,}05$.	Разность уровней въ метрахъ $d = 0{,}0255\ D$.
3	$n = 50$	$D = 4{,}40$ дѣленій.	2,25	$v = 1{,}20$	$d = 0{,}112$
5	60	5,25 »	3,0	1,45	0,134
1	74	7,80 »	3,5	1,80	0_5199
5	75	8,16 »	—	1,82	0,208
7	85	10,53 »	—	2,07	0,268
6	100	15,10 »	4,5	2,45	0,385
7	104	15,96 »	—	2,55	0,407
6	110	16,30 »	5,25	2,70	0,416

Принимая формулу $d = k\frac{v^2}{2g}$ или $d = Kv^2$, должно получить для $\frac{d}{v^2}$ постоянную величину $\frac{k}{2g}$ или K. Въ дѣйствительности имѣемъ слѣдующій рядъ чиселъ (для $n = 50$ и 74 мало наблюденій, а потому не приводимъ результата):

$n =$	60	75	85	104	110
$K =$	0,063	0,063	0,062	0,064	0,057

Среднее $K = 0.062$, а потому $k = K2g = 0{,}062.\ 2.\ 9{,}8 = 1{,}22$, что близко къ обычнымъ числамъ, получаемымъ при изученіи сопротивленія. Надо думать, что при надлежащимъ устройствѣ приборовъ, при продолжительномъ изученіи дѣла и при разнообразныхъ возможныхъ улучшеніяхъ — приборъ, подобный вышеописаному видоизмѣненію трубки Пито, можетъ сдѣлаться практическимъ орудіемъ мореплавателей, потому что онъ можетъ показывать (и регистрировать, то-есть записывать) въ каждый моментъ пути скорости хода и сопротивленія. Замѣтимъ, что самъ Пито уже употребилъ свою трубку для подобной же цѣли и что затѣмъ многіе предлагали и примѣняли подобный же приборъ, но никто, сколько мнѣ извѣстно, не занялся окончательною разработкою этого прибора, который можно было бы назвать ходомѣромъ. Во всякомъ случаѣ улучшенная трубка Пито во многихъ отношеніяхъ заслуживаетъ предпочтеніе предъ обыкновеннымъ морскимъ лагомъ и стоитъ вниманія практическихъ мореходовъ. Ея видоизмѣненіе, приложимое къ воздухоплаванію, я предполагаю описать, когда число опытовъ успѣю увеличить. Считаю здѣсь неизлишнимъ указать на то, что примѣненіемъ трубки Пито къ опредѣленію хода кораблей послѣ самого Пито занимались многіе. Укажу напримѣръ на *Berton* (Society of Engineers, Trans. for 1869 p. 215, Grosbof Theoretische Maschinenlehre I—887), *Fletcher* и *Reichenbach* (Engineering 1871, Dingler's Annalen T. 203 p. 329) и *Froude* (Report of the British Association 1874 p. 255). Бертонъ и Фроудъ примѣнили вертикальную трубку съ боковымъ отверстіемъ и показали, что, вращая трубку около оси, получается поднятіе или опусканіе, соотвѣтствующее углу и скорости. Мнѣ кажется, что необходимо соблюдать въ приборахъ слѣдующія непремѣнныя условія, чтобы онъ былъ точнымъ измѣрителемъ скоростей: помѣстить его впереди носа, отверстія дѣлать въ центрѣ тонкой круглой пластинки перпендикулярной килю, одно отверстіе направить противъ теченія,

время, когда движенія (воды или прибора) нѣтъ, такъ и тогда, когда оно происходитъ, Дю-Бюа судилъ о высотѣ поднятія воды въ трубкѣ. Приборы, примѣненные Дю-Бюа, изображены на листѣ 1-мъ, чертежѣ 2, 3 и 4. Первый изъ нихъ представляетъ простѣйшую, первичную форму прибора, употребленную для наблюденій около поверхности воды ab. Приборъ этотъ есть деревянный вверху открытый ящикъ, видный на чертежѣ 2-мъ спереди, гдѣ сдѣлано 9 отверстій и въ разрѣзѣ, на которомъ видно относительное положеніе шеста gh, служащаго для укрѣпленія снаряда. Въ ящикѣ плаваетъ поплавокъ съ выдающимся указателемъ n. Приборы, изображенные на черт. 3 и 4, закрыты со всѣхъ сторонъ и только спереди имѣютъ отверстія, а сбоку имѣютъ особыя трубки, вмѣщающія поплавокъ. На первомъ изъ этихъ приборовъ (деревянный ящикъ) 21 отверстіе, а во второмъ 5 и болѣе. Послѣдній состоялъ изъ жестянаго ящика съ переднею стѣнкою въ 1 кв. футъ. Важно замѣтить, что только у этого послѣдняго прибора толщина стѣнокъ мала, а потому отверстія не представляли трубчатыхъ насадокъ, какъ у приборовъ 3 и 2, гдѣ стѣнки были деревянныя, толщиной у 2-го въ 1 дюйм., у 3-го въ $\frac{1}{4}$. При опытѣ открывались или закрывались желаемыя отверстія. Съ этими немудрыми приборами, Дю-Бюа сдѣлалъ очень мудрыя опредѣленія, навсегда памятныя въ наукѣ о сопротивленіи, оказавшія на ходъ ея большое вліяніе, хотя и довольно одностороннее.

Прежде всего приборъ, черт. 2-й, былъ помѣщенъ въ текущую воду, скорость которой опредѣлялась особымъ маховикомъ съ лопатками, и была (на глубинѣ центра прибора) = 42,1 дюйма въ секунду. Этой скорости отвѣчаетъ высота (по уравненію $h = \frac{v^2}{2g}$) 2″,444 [1]). Когда открыто было одно среднее отверстіе прибора (фиг. 2), погруженнаго на $\frac{3}{4}$ высоты въ воду, въ ящикѣ его (опытъ n°207) высота воды была 3″,33, когда открыты были только два или одно ближайшія къ центру отверстія, поднятіе = 2″.42, когда открыто было одно нижнее среднее отверстіе 2,09, одно угловое нижнее 1″,50. Когда открыты были всѣ отверстія, поднятіе было = 2,59. Когда взятъ былъ приборъ, изображенный на чертежѣ 3, и погруженъ весь въ воду (бокъ прибора 7″, погруженіе центра 6″), то при открытіи всѣхъ отверстій (опытъ 208) поднятіе поплавка было=2″7$\frac{1}{2}$‴, когда открыто только центральное отверстіе=3″5‴, одно отверстіе подъ центромъ 3″1‴, одно подъ этимъ 2″9‴, одно нижнее среднее 2″3‴, одно сбоку центра 3″4‴, слѣдующее сбоку 3″0‴, одно боковое крайнее 2″6‴, одно надъ центромъ 3″3‴, второе надъ

другое по теченію (обратить къ кораблю), оба расположить по направленію киля и наблюдать разность уровней въ двухъ трубкахъ, сообщенныхъ съ этими отверстіями. Неуспѣхъ попытокъ, сдѣланныхъ до сихъ поръ, можно приписать несоблюдснію одного изъ этихъ условій..

[1]) 1 французскій дюймъ 1″=27,07 миллиметровъ=$^1/_{12}$ франц. фута=12 фр. линій.

центромъ 3″0″, самое верхнее одно 2″7½‴. Изъ этого слѣдуетъ съ очевидностію, что давленіе на разныя части пластинки не одинаково: въ центрѣ наибольше, къ бокамъ уменьшается, въ центрѣ $= 1{,}33\ h$ (h высота, отвѣчающая скорости), а на всей пластинкѣ $= 1{,}06\ h$. Очевидна также связь этихъ поднятій съ поднятіемъ воды на вертикальной плоскости, поставленной противу теченія. Приближенно допускаетъ и Дю-Бюа, что среднее давленіе на дно поверхность равно давленію столба h, какъ слѣдуетъ изъ опытовъ Д'Аламбера, Кондорсе и Боссю (стр. 18). Далѣе онъ говоритъ преимущественно о явленіяхъ, замѣчаемыхъ при полномъ погруженіи въ воду вышеописанныхъ видоизмѣненій трубки Пито. Слѣдующій рядъ опытовъ сдѣланъ въ каналѣ 13′ ширины и 3′ 9″ глубины. Дю-Бюа разсматриваетъ его по отношенію къ прибору (поверхность 1 кв. футъ), какъ безконечную [1]) массу воды, хотя приборъ погружался такъ, что центръ былъ на глубинѣ 15″. Всѣ результаты переведены къ скорости теченія 36″ въ секунду. Этой скорости отвѣчаетъ высота h=21,5 линій. Въ дѣло пошелъ жестяной приборъ, изображенный на чертежѣ 4-мъ. У него 5 отверстій: I въ центрѣ, II на ¼ разстоянія отъ вертикальнаго бока, на срединѣ высоты, III близъ края, на той же горизонтальной линіи средины, всего на 10‴ отъ края, IV у самого края на той же линіи и V въ самомъ углу, внизу. Всѣ отверстія имѣли около 1‴ діаметра. Въ опытѣ 209 былъ взятъ одинъ приборъ самъ по себѣ, въ опытѣ 210 онъ составлялъ переднюю стѣнку куба; а въ 211-мъ переднюю стѣнку призмы длиною въ 3′. Возвышеніе воды въ трубкѣ было слѣдующее—въ линіяхъ (знакъ минусъ передъ цифрами означаетъ пониженіе уровня):

Открыты отверстія:	I	II	III	IV	V	Всѣ.
Опытъ 209	32,8	27.8	20,8	—5,5	—8,6	17,0
» 210	32,3	30,2	17,8	—12,1	—	14,3
» 211	—	—	—	—	—	16,0

Тутъ видно, что около краевъ давленіе настолько уменьшается, что даже становится отрицательнымъ, а въ центрѣ оно въ два раза больше, чѣмъ на всю поверхность. Чтобы объяснить эти отношенія, Дю-Бюа разсуждаетъ такъ: ударъ воды на всѣ части поверхности былъ бы одинъ и тотъ же, еслибы вода могла тотчасъ уходить, исчезать, но она должна уклониться, протечь по поверхности и скорость теченія къ краямъ будетъ увеличиваться; это теченіе въ бокъ, вдоль по поверхности само по себѣ уменьшаетъ давленіе, а потому въ разныхъ точкахъ поверхности будетъ

[1]) Такъ какъ по моимъ личнымъ опытамъ и по совокупности извѣстныхъ мнѣ другихъ наблюденій должно думать, что сопротивленіе замѣтно ростетъ даже тогда, когда діаметръ канала въ 5 разъ превышаетъ діаметръ тѣла (здѣсь глубина въ 4 раза), то въ узкости канала, примѣненнаго Дю-Бюа, должно искать причину неточности нѣкоторыхъ выводовъ Дю-Бюа.

наблюдаться алгебраическая сумма (ариѳметическая разность) давленій: того положительнаго, которое зависитъ отъ текущей въ рѣкѣ воды, и того отрицательнаго, которое происходитъ отъ тока параллельнаго (или наклоннаго) поверхности. Послѣдняя величина близъ краевъ оказывается превосходящею первую, а потому въ результатѣ получается около края отрицательное давленіе [1]). Эти соображенія объясняютъ, можетъ быть, также и то различіе, которое видно въ 3-хъ предъидущихъ опытахъ, потому что скорости утеканія воды съ передней поверхности и вдоль ея должны зависѣть не только отъ давленія протекающей воды, но также и отъ того, куда утекаетъ вода и какія препятствія она встрѣчаетъ своему дальнѣйшему движенію. Однако Дю-Бюа считаетъ различія, полученныя въ опытахъ 209, 210 и 211, только отъ неточности способовъ наблюденія (§ 454), какъ можно думать по слѣдующему опыту (n° 212). Чтобы узнать все давленіе, испытываемое приборомъ, сдѣлано было на одномъ приботѣ 81, на другомъ 625 отверстій (сумма ихъ=$^1/_{50}$ всей поверхности). При этомъ послѣднемъ получилось поднятіе 28,$'''$3, когда взятъ кубъ 29,$'''$2, а для призмы 28,$'''$4. Когда взятъ приборъ съ 81 отверстіяти 30,$'''$8. Для трубки Пито, кончающейся воронкою, поднятіе=30,$'''$1, а когда отверстіе воронки закрыто діафрагмою съ однимъ отверстіемъ 34,$'''$4.

Изъ предъидущихъ опытовъ однако нельзя судить о всемъ сопротивленіи поверхности приборовъ, потому что у краевъ давленіе отрицательно и истинное среднее изъ суммы всѣхъ элементарныхъ давленій должно быть меньше наблюденнаго, потому что у самыхъ краевъ не было отверстій. Дю-Бюа разсчитываетъ, что все среднее давленіе у него было 25,$'''$5, а такъ какъ высота, отвѣчающая скорости=21$'''$,5, то для передней плоскости должно признать нормальное сопротивленіе равнымъ вѣсу столба жидкости, которому плоскость служитъ основаніемъ, а высота $= \frac{25,5}{21,5} h = 1,186h$, гдѣ h есть высота, отвѣчающая скорости. Слѣд. передняя нормальная плоская поверхность представляетъ сопротивленіе=$1,186\frac{v^2}{2g}$. Но это переднее носовое сопротивленіе или давленіе составляетъ только часть полнаго сопротивленія, въ которомъ участвуетъ еще заднее кормовое сопротивленіе, какъ бы толкающее тѣло назадъ, вслѣдствіе недостатка тамъ давленія, и выражающееся въ томъ разрѣженіи или уменьшеніи давленія, которое замѣчается, когда трубку Пито или ей соотвѣтствующіе приборы Дю-Бюа повернуть отверстіями по теченію, а не противъ его, какъ было выше. Тогда замѣчается опусканіе поплавка, служащее мѣрою недавленія. Оно изучается

[1]) Не должно смѣшивать, какъ это, можетъ быть, дѣлалъ даже самъ Дю-Бюа, гидро-статическаго давленія съ гидродинамическимъ или съ напоромъ. Статическое давленіе остается тоже или почти тоже при движеніи, какъ и до него. Иначе изъ отверстія подъ водой близъ кормы сосало бы воду, а она въ дѣйствительности туда вливается.

Дю-Бюа тѣми же способами, какъ и переднее давленіе. Мы не считаемъ нужнымъ описывать всѣ опыты (отъ 217 до 222), сюда относящіеся, а прямо приводимъ выводы, сдѣланные Дю-Бюа: 1) съ длиною тѣла значительно уменьшается кормовое недавленіе (у прибора 4-го съ 5 отв. открытыми=15‴,0, у куба 6‴,0, у призмы 1‴,12); 2) оно незначительно уменьшается отъ периферіи задней плоскости къ центру; 3) оно въ своей средней величинѣ одинаково (какъ и переднее давленіе) для большихъ и малыхъ плоскостей и слѣдовательно сопротивленіе, отъ него зависящее, пропорціонально поверхности. 4) Если h есть высота, отвѣчающая скорости, то для пластинки недавленіе $= 0{,}670h$, для куба $0{,}271h$, для призмы $0{,}153h$, вообще kh, гдѣ k зависитъ отъ относительной длины тѣла.

Изъ совокупности предъидущихъ опытовъ, считая среднія показанія трубки Пито за истинные мѣрители давленія, испытываемаго тѣломъ, прямо противопоставленнымъ теченію, слѣдуетъ, что 1) плоскость, 2) кубъ и 3) призма, длиною превышающая въ 3 раза ея поперечные размѣры, испытываютъ слѣдующую сумму давленій:

1) спереди $\Delta 1{,}186 hS$ + сзади $\Delta 0{,}670 hS = 1{,}856$
2) » $\Delta 1{,}186 hS$ + » $\Delta 0{,}271 hS = 1{,}457$
3) » $\Delta 1{,}186 hS$ + » $\Delta 0{,}153 hS = 1{,}239$

$\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\} \frac{v^2}{2g} S\Delta$ [1]).

Выражая въ килограммахъ и метрахъ ($g=9{,}82$) для плоскости, которой поверхность=S, въ жидкости, коей 1 куб. метръ вѣситъ Δ, при скорости v метровъ, давленіе:

$$P = \frac{1{,}856}{2.9{,}82} \Delta S v^2 = 0{,}0945\, \Delta S v^2 \quad \ldots\ldots \text{(A}$$

Напр. для воды, при скорости = 1 метру, площадь въ 1 кв. метръ испытываетъ напоръ 94,5 килограмма. Слѣдствіе подобнаго рода должно было провѣрить опытомъ. И это легко было сдѣлать, употребляя въ дѣло вѣсы или динамометръ. Дю-Бюа, приступая къ подобному вѣсовому опредѣленію цѣлаго сопротивленія, однако оговаривается насчетъ того напр., что въ цѣломъ сопрот. участвуетъ треніе [2]) и т. п. причины, могущія дѣлать его величину иною, чѣмъ вышеопредѣленная. Взяты были: I пластинка поверхностью=1 кв. ф.; II кубъ, сторона 12″; III призма, основаніе 1 кв. ф., длина 3′ и IV такая

[1]) Для франц. фунтовъ и футовъ $\Delta = 70$, для скорости бывшей въ опытахъ, $h = \frac{v^2}{29} = 21{,}‴5 = 0{,}149$ фута. Поверхность S въ частномъ случаѣ большинства опытовъ Дю-Бюа = 1 кв. футу

[2]) Чрезвычайно интересно, что Дю-Бюа, говоря о треніи, прямо предлагаетъ заимствовать величину его изъ опытовъ теченія воды въ трубкахъ и отъ скорости рѣкъ, что именно сдѣлали потомъ. Сверхъ того онъ (§ 481) считаетъ, что треніе не успѣваетъ вполнѣ проявиться на короткомъ тѣлѣ, и только при установившемся режимѣ, то есть для длиннаго тѣла, пріобрѣтаетъ истинную свою величину. Это прямо противоположно тому, что предполагаетъ Фроудъ (см. 6-е приложеніе).

же призма длиною 6′; каждое изъ этихъ тѣлъ прикрѣплялось къ вертик. вѣтви вѣсовъ, имѣющихъ форму буквы Т и вращающихся въ мѣстѣ соединенія горизонтальной и вертикальной вѣтвей. На горизонтальномъ плечѣ прикрѣплена чашка, и такъ какъ длина этого плеча въ два раза менѣе чѣмъ нисходящаго, то давленіе было въ два раза менѣе груза чашки, уравновѣшивающаго напоръ теченія на прикрѣпленное тѣло. Погруженіе тоже, какъ выше, и скорости тѣже. Полученныя сопротивленія: I 19,45 фунт.; II 15,22; III 13,87 и IV 14,27 фунтовъ. По вышеприведеннымъ же формуламъ, слѣдуетъ I 19.34; II 15,24. III 13,96. а для длинной призмы Дю-Буа разсчитываетъ IV=13,49. Изъ этого видно, что сумма передняго и задняго давленій исчерпываютъ почти все давленіе для короткихъ тѣлъ, а для длиннаго IV-го тѣла получается перевѣсъ 14,27—13,69=0,78 фунта, который объясняется треніемъ и т. п. И такъ здѣсь ясно, что пріемъ, предложенный Дю-Буа, даетъ дѣйствительно мѣру сопротивленія. Мы въ дальнѣйшемъ изложеніи (въ 3-й главѣ) сопоставимъ съ этими другія прямыя опредѣленія сопротивленій, теперь же обратимъ вниманіе на то, что пріемъ Дю-Буа новъ и изященъ, онъ годится для прямой плоскости, непримѣнимъ къ кривымъ поверхностямъ и что въ предъидущемъ дѣло касается неподвижнаго тѣла и движущейся среды, а не того обычнаго случая—движущагося тѣла, который составляетъ главный предметъ ученія о сопротивленіи. Это видитъ ясно Дю-Буа и въ слѣдующей главѣ (V) переходитъ къ опредѣленію сопротивленія движущагося тѣла въ неподвижной водѣ. До него никто не сомнѣвался въ томъ, что вышеразсмотрѣнное давленіе равно этому сопротивленію. Онъ пожелалъ провѣрить это положеніе опытнымъ путемъ, задавшись (§ 471) вопросомъ: «не представляетъ ли спокойная вода сравнительно съ движущеюся большей легкости раздвиганія ея частей и слѣдовательно меньшаго сопротивленія?» Отвѣтъ потребовался отъ природы при посредствѣ тѣхъ же видоизмѣненій трубки Пито, какъ и въ предшествующихъ опытахъ. Для этого, около Конде, на запрудѣ теченія рѣки (la Haine) (6′ глубины) опытные бурлаки, идя по обоимъ берегамъ, тянули съ равномѣрною скоростью двѣ скрѣпленныя между собою лодки; между ними помостъ, футовъ 6 длины, надъ водой 1 футъ, на томъ помостѣ прикрѣпленъ, на желѣзной полосѣ, опущенный въ воду, вышеописанный приборъ (черт. 4). На томъ приборѣ было или 2 отверстія (одно въ центрѣ, другое совершенно у края), или 625 отверстій. Обращался онъ отверстіями или въ ту сторону, куда тянули, или въ обратную. Получались, конечно, возвышенія или пониженія поплавка. Наблюдалась скорость. Она измѣнялась отъ 25 до 67 дюймовъ въ секунду. Приводимъ подъ знакомъ $\frac{H}{h}$ среднія отношенія наблюдаемыхъ высотъ къ высотамъ, соотвѣтствующимъ скоростямъ:

Скорость отъ 34 до 37″; спереди	$\frac{H}{h}$ 1,09,	сзади	$\frac{H}{h}$ = 0,48	для одного средняго отверстія.
» » 48 » 54 »	1,05 »	0,57	
» » 40 » 59 »	0,32 »	0,48 для крайняго.	
» » 25 » 41 »	1,06 »	0,41	для 625 отверст.
» » 49 » 52 »	1,01 »	0,47	

Выводы Дю-Бюа изъ предыдущихъ опытовъ (отъ 223 до 257 опыта) суть: 1) давленіе здѣсь убываетъ отъ центра къ окружности медленнѣе, чѣмъ при давленіи жидкости на неподвижное тѣло. У передняго края нѣтъ здѣсь отрицательнаго давленія, какъ тамъ. Слѣдовательно здѣсь вода уходитъ съ краевъ съ меньшею скоростію, чѣмъ тамъ, или равномѣрнѣе. 2) Здѣсь $\frac{H}{h}$ не постоянно,—измѣняется со скоростію. Надо искать въ вязкости жидкости причину отступленія отъ закона пропорціональности сопротивленій квадрату скоростей. Надо думать однако, что при скорости выше 4′ пропорціональность эта существуетъ, 3) Поправляя (на недостатокъ отверстій у краевъ) наблюденныя при многихъ отверстіяхъ отношенія $\frac{H}{h}$ для давленія спереди, можно видѣть, что оно приближается къ 1,00, вмѣсто 1,186, какъ при неподвижномъ тѣлѣ. Эта разность опредѣляетъ различіе сопротивленій въ случаѣ подвижнаго тѣла—отъ случая подвижной среды. 4) Величина $\frac{H}{h}$ для заднято недавленія увеличивается со скоростью и повидимому не стремится къ постоянству, такъ что вся сумма сопротивленія мѣняется со скоростью. При скорости 36″ заднее недавленіе надо принять для пластинки равнымъ 0,433 h, а потому для движущейся пластинки сопротивленіе будетъ $R = \Delta S h (1 + 0{,}433) = \Delta S h\ 1{,}433$ вмѣсто $\Delta S h\ 1{,}856$, какъ для неподвижной пластинки въ струѣ воды.

Приведенныя числа и выводы интересны по ихъ новизнѣ, но видно какъ мало прочности въ окончательныхъ заключеніяхъ, касающихся движущагося тѣла. Для этого случая нѣтъ у Дю-Бюа и прямыхъ (вѣсовыхъ) опредѣленій всего сопротивленія, онъ довольствуется цитированіемъ двухъ опытовъ Боссю и Борда. Видно, что эта часть работы Дю-Бюа слабѣе всѣхъ другихъ. А она, съ ея результатами, главнымъ образомъ и вліяла исторически. Такова уже судьба сопротивленія. Мнѣ кажется, что даже основное положеніе о различіи двухъ сопротивленій (движется вода и движется тѣло) недостаточно подкрѣплено вышеописанными опытами Дю-Бюа, а потому продолжаетъ съ тѣхъ поръ и понынѣ оставаться сомнительнымъ. Новыхъ же полныхъ опытовъ въ этомъ отношеніи никто не предпринималъ, хотя легко сочинить обѣщающіе точность [1]).

[1]) Надо взять вѣсы съ вертикальною вѣтвью и, прикрѣпивъ на ней тѣло, напр. шаръ, двигать ихъ съ разными скоростями, а затѣмъ тоже сдѣлать въ потокѣ, опять при разныхъ скоростяхъ. Уравновѣшивающій грузъ дастъ со-

Въ слѣдующей главѣ Дю-Бюа описываетъ свои опыты (отъ 262 до 323) съ маятнымъ качаніемъ разныхъ тѣлъ въ водѣ. Вотъ поводъ къ ихъ производству: когда токъ воды встрѣчаетъ плоскость, онъ ее обтекаетъ, оставляя около плоскости какъ бы родъ водянаго носа и водяной кормы, которыхъ скорость меньше, чѣмъ въ остальной жидкости [1]). Подобное произойдетъ и при движеніи тѣла въ жидкости, а чтобы судить о массѣ сопутствующей жидкости, надо наблюдать колебанія маятниковъ. Далѣе я привожу подлинныя слова Дю-Бюа: «Разныя массы, прикрѣпленныя къ маятникамъ одной длины, будутъ колебаться въ равныя времена и колебанія при малыхъ амплитудахъ изохронны. Времена колебаній будутъ обратно пропорціональны квадр. корнямъ изъ длины маятниковъ. Но если два маятника будутъ качаться при различномъ напряженіи тяжести, то для равенства временъ колебанія нужно, чтобы длины относились какъ тяжести. Тѣло, удаленное на такое разстояніе отъ земли, что тамъ напряженіе тяжести уменьшается на $^1/_3$, будетъ тамъ имѣть только $^2/_3$ того вѣса, что на земной поверхности. Но если тѣло, оставшись на землѣ, будетъ имѣть такую плоскость, что, погруженное въ воду, теряетъ $^1/_3$ своего вѣса, оно будетъ тогда въ такихъ же условіяхъ, какъ при сказанномъ удаленіи отъ земли, потому что при той же массѣ оно будетъ имѣть только $^2/_3$ своего начальнаго вѣса. Отсюда слѣдуетъ, что для него тогда надо сократить на $^1/_3$ длину маятника сравнительно съ длиною въ пустотѣ, чтобы сохранить тѣже

противленіе. Динамометромъ можно еще удобнѣе выполнить ту-же задачу. Только потокъ надо взять большой и двигать надо въ средѣ обширныхъ размѣровъ (а не въ каналахъ, какъ то въ обычаѣ старыхъ изслѣдованій, дающихъ иногда дѣйствительно канальскія различія результатовъ) и при полномъ погруженіи. Въ воздухѣ это легче исполнимо, чѣмъ въ водѣ, и я предполагаю это выполнить. Условіе безпредѣльности или обширности среды не выполнено у Дю-Бюа и, быть можетъ, отъ него зависятъ замѣченныя имъ разности двухъ родовъ сопротивленія. Съ своей стороны я не вижу однако ничего невозможнаго въ выводѣ Дю-Бюа (только онъ кажется мнѣ нетвердымъ на своихъ опытныхъ опорахъ), потому что тѣло, двигающееся въ неподвижной жидкости, даетъ поводъ къ движенію около него жидкости (на что и расходуется работа сопротивленія), къ движенію иного рода, чѣмъ то, которое расходуется въ жидкости, обтекающей препятствіе. Здѣсь скорости жидкости уменьшаются, рождающееся отъ ихъ потери тепло происходитъ отъ той же жидкости, которой передается. Тамъ скорости жидкости образуются и прекращаются, потеря скорости происходитъ въ тѣлѣ, оно теряетъ энергію, а образующееся отъ него тепло передается жидкости. Процессы сходны, но не тождественны, и умъ найдетъ оправданіе и тогда, когда сопротивленіе въ обоихъ случаяхъ выйдетъ по опытамъ одно и тоже, какъ и въ томъ случаѣ, когда оно выйдетъ различнымъ, какъ у Дю-Бюа. Нуженъ, настоятеленъ и будетъ рѣшать дѣло — разумный и твердый опытъ, а молодое и неопытное умственное построеніе пойдетъ на поводу и въ ту и въ другую сторону, пока пріученное опытомъ къ вѣрной дорогѣ само не станетъ возить за собой или на себѣ всю сущность опытнаго знанія, какъ обученная на поводу лошадь повезетъ куда слѣдуетъ.

[1]) Это слова Дю-Бюа. Не умѣю помирить этого съ тѣмъ, что было сказано имъ же выше о скорости движенія вдоль плоскости, а излагаю мысль Дю-Бюа, стараясь быть близкимъ къ подлиннику, при всевозможной краткости.

времена колебаній. Если a длина маятника въ пустотѣ, l длина синхроническаго маятника въ жидкости, p вѣсъ тѣла маятника въ жидкости, P вѣсъ вытѣсненной жидкости, $P+p$ вѣсъ въ пустотѣ, то $\frac{P+p}{p}$ будетъ отношеніе вѣсовъ въ пустотѣ и водѣ, а потому $\frac{a}{l}=\frac{P+p}{p}$, откуда $l=\frac{ap}{P+p}$.

«Эта формула дала бы точно длину маятника, если бы тѣло не увлекало съ собой части жидкости въ видѣ жидкаго носа и кормы. Пусть n есть постоянное число и nP выражаетъ вѣсъ вытѣсненной и увлеченной жидкости; движущаяся масса, или вѣсъ въ пустотѣ, не будетъ уже $p+P$, а выразится чрезъ $p+nP$, вѣсъ же въ водѣ есть p. Слѣдовательно точное выраженіе будетъ:

$$l=\frac{ap}{nP+p}, \text{ откуда } n=\frac{p}{P}\left(\frac{a}{l}-1\right)».$$

Эту величину n Дю-Бюа и опредѣляетъ. Притомъ предполагается, что сопротивленіе среды, уменьшая амплитуды колебаній (вліяя на декрементъ качаній), не измѣняетъ ихъ временъ. Для опытовъ Дю-Бюа беретъ сперва шары разнаго діаметра и плотности, заставляетъ ихъ качаться на тонкой нити разной длины въ сосудѣ съ водою размѣрами $51\times17\times14$ дюймовъ. Напр. взятъ свинцовый шаръ, діаметромъ $1''{,}0113$, вѣсъ въ воздухѣ 2304 грана (1 куб. дюймъ воды вѣсомъ $337^1/_2$ грановъ), вѣсъ въ водѣ 2102 грана, при длинѣ маятника, качающагося въ водѣ, равной 8,02; 32,08; 128,12 и 286,88 дюймовъ, оказались времена качаній 0,5; 1; 2 и 3 секунды, а по напряженію тяжести слѣдуетъ, что длина соотвѣтственныхъ маятниковъ въ пустотѣ (величина a) была бы 9,178; 36,714; 146,856 и 330,427 дюймовъ. — Отсюда выводятся $n=1{,}502$; 1,502; 1,522 и 1,620. Такъ для стеклянныхъ и деревянныхъ шаровъ получилась n отъ 1,3 до 1,67, а въ среднемъ, около $n,=1{,}5$. Замѣтимъ при этомъ, что Пуассонъ теоретически вывелъ именно такое число для всякихъ шаровъ, но опредѣленія Бесселя и Бейли показываютъ, что величина эта измѣняется съ діаметромъ шара. Все это сведено въ 1850 г. Стоксомъ въ его замѣчательномъ мемуарѣ о внутреннемъ треніи, помѣщенномъ въ мемуарахъ Кембриджскаго общества. Томъ IX [1]). То что Дю-Бюа считаетъ зависящимъ лишь отъ массы спутной воды, то оказывается происходящимъ и объясняемымъ внутреннимъ треніемъ. Надо не забыть однако, что это внутреннее треніе требуетъ именно того, чтобы допустить движеніе вмѣстѣ съ тѣлами части приставшей къ нему жидкости. Далѣе Дю-Бюа

[1]) On the Effect of the Internal Friction on the Motion of Pendulums. By G. G. Stokes. Стр. 8-я, II части IX тома Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1851. Это рѣдкое изданіе я имѣлъ случай получить только въ послѣднее время, благодаря тому, что оно оказалось въ библіотекѣ Пулковской Обсерваторіи.

производитъ большой рядъ наблюденій надъ качаніемъ въ водѣ площадокъ, цилиндровъ, призмъ, кубовъ и т. п. тѣлъ. Нить, на которой они качаются, раздѣляется близъ тѣла на двѣ вѣтви, движущіяся между двумя горизонтально натянутыми проволоками, опредѣляющими плоскость качанія. Для призмъ и цилиндровъ, качающихся по направленію оси, при разной длинѣ l и разной площади основанія S, вполнѣ хорошо примѣняется выраженіе $n = \frac{0,705}{l}\sqrt{S} + 1,13$. Отсюда напр. для куба, у котораго $S = l^2$, получается $n = 1,835$, а получено напр. для куба, у котораго бокъ $= 2,177$, вѣсъ въ воздухѣ $P + p = 13716$ грановъ, въ водѣ $p = 9864$, вѣсъ вытѣс. воды $= 3852$ грана, время качанія $1''.3137$, длина соотвѣтств. маятникамъ пустотѣ 62,397 дюйм., наблюденная длина при качаніи куба въ водѣ $36''.714$, значеніе $n = 1,8333$, а такъ какъ $(n-1)$ P есть вѣсъ сопровождающей воды, то онъ здѣсь $= 3210$ грановъ. Точно также для свинцовой круглой площадки, у которой діаметръ $= 2,677$ дюйм., а толщина $= 1,10 = l$, вычисленное значеніе $n = 19,40$, изъ наблюденій 19,42. Я не сомнѣваюсь, что наблюденія Дю-Бюа будутъ еще многократно обсуждаться и повторяться въ наукѣ о сопротивленіи, но самъ избѣгаю здѣсь и въ дальнѣйшемъ изложеніи останавливать долго вниманіе читателей на вопросахъ, касающихся сопротивленій, являющихся при качательномъ (маятномъ) движеніи, потому что въ этомъ случаѣ скорости неравномѣрны, а если при постоянныхъ скоростяхъ задача сопротивленія сложна, здѣсь уже и подавно. Не должно однако забывать, что наблюденія надъ маятниками могутъ доставить незамѣнимый матеріалъ, потому что прямыя наблюденія просты, и результаты легко могутъ быть доведены до всякой желаемой точности, потому что дѣло это изучено съ крайнею степенью тщательности и полноты, трудами Борда, Бесселя, Бейли и многихъ другихъ. Придетъ время, когда за рѣшеніемъ тонкихъ и численныхъ вопросовъ сопротивленія опять обратятся къ маятникамъ, а нынѣ должно сосредоточить вниманіе на сопротивленіяхъ, являющихся при равномѣрномъ движеніи, пользуясь развѣ мятниками, такъ сказать, только въ качественномъ отношеніи, подобно тому, какъ ими воспользовался Кулонъ для изученія тренія.

Переходя къ тѣламъ, ограниченнымъ наклонными и кривыми плоскостями, Дю-Бюа слѣдующимъ способомъ объясняетъ меньшее сопротивленіе ихъ сравнительно съ тѣлами (призмами и цилиндрами), кончающимися нормальною къ пути плоскостью. Онъ говоритъ: «первая причина, уменьшающая сопротивленіе, есть увеличеніе скорости жидкости текущей вдоль наклонной плоскости сравнительно съ нормальною [1]); уменьшеніе это должно возра-

[1]) Мы видѣли выше (за нѣс. стр.), что этой скорости теченія вдоль плоскости Дю-Бюа приписываетъ уменьшеніе давленія отъ центра къ периферіи и ею объясняетъ отрицательное давленія около края

стать съ наклонностію площади, а отъ того и переднее давленіе (носовое) тогда должно уменьшаться. Другая, можетъ быть болѣе важная, причина состоитъ въ томъ, что прибавка носовой части къ плоской нормальной поверхности тѣла должна заставлять передовыя струи жидкости уклоняться далѣе отъ тѣла и сохранять чрезъ то большую часть своей начальной скорости, отчего сопротивленіе тѣла должно уменьшаться». Эта выписка (§ 514) мнѣ кажется отлично выражающею достоинства и недостатки мыслей Дю-Бюа о сопротивленіи и ту связь, которую имѣютъ взгляды этого изслѣдователя съ послѣдующимъ развитіемъ ученія о сопротивленіи. Надо замѣтить, что понятіе о давленіи обтекающихъ струй для объясненія сопротивленія первый ввелъ, если не ошибаюсь, Ейлеръ въ срединѣ прошлаго столѣтія, но ни къ чему не пришелъ [1]). Дѣйствіе и вліяніе кормы на мѣру всего сопротивленія Дю-Бюа объясняетъ точно также, какъ и вліяніе носовыхъ насадокъ, потому что масса завлекаемой тѣломъ жидкости увеличивается съ носа и кормы одинаково и вліяетъ на уменьшеніе сопротивленія по мѣрѣ уклона поверхностей, ограничивающихъ переднюю и заднюю части тѣла. Дю-Бюа склоненъ считать сопротивленіе обратно пропорціональнымъ массѣ жидкости, увлекаемой тѣломъ. Сравнивая напр. количество жидкости, увлекаемой шаромъ и круглой пластинкой того же радіуса, получается отношеніе 2,86:1. Опытъ Борда даетъ отношеніе сопротивленій 2,51:1. А такъ какъ выше мы видѣли, что сопротивленіе пластинки, движущейся въ жидкости, по Дю-Бюа, опредѣляется выраженіемъ $\Delta S h 1{,}433$, то сопротивленіе шара будетъ въ 2,86 разъ меньше или $= \Delta S h 0{,}50$, гдѣ подъ S подразумѣвается площадь большаго круга или $^1/_4$ поверхности шара. Разобравъ опыты Ньютона надъ паденіемъ шаровъ въ водѣ (см. слѣдующую главу) Дю-Бюа находитъ, что они даютъ сопротивленіе шара $\Delta S h$ 0,523, т. е. утверждаютъ его выводъ.

Этимъ кончается изслѣдованіе Дю-Бюа, касающееся воды. Далѣе онъ говоритъ о сопротивленіи воздуха, но этотъ отдѣлъ, менѣе оригинальный, мы не станемъ разсматривать съ такою подробностію, какъ предшествующій, напомнивъ, что всѣ главные выводы и существо мнѣній выражены имъ самимъ въ вышеприведенномъ (стр. 30, 31) извлеченіи изъ предисловія. Но нельзя не обратить вниманіе на первоначальный опытъ Дю-Бюа, сдѣланный имъ для доказательства существованія массы воздуха, увлекаемой маятникомъ въ своемъ движеніи. Сдѣланъ былъ шаръ діаметромъ немного болѣе 2-хъ футовъ, привѣшенъ на проволокѣ и качался какъ маятникъ. Противъ него, на той же высотѣ, на разстояніи, доходившемъ до 4-хъ футовъ, привѣшивалось на тонкомъ волоскѣ легкое перышко. Оно качалось изохронно, въ тѣже времена, какъ и шаръ, было какъ бы прикрѣплено къ шару, только амплитуды качаній были меньше, чѣмъ дальше удалялось перышко отъ шара.

[1]) См. 3-е приложеніе, гдѣ изложены взгляды Ейлера.

Это явленіе Дю-Бюа объясняетъ сопутствующею, качающеюся вмѣстѣ съ маятникомъ массою воздуха. Руководясь опытами, сдѣланными надъ плавающими тѣлами, и особенно тѣмъ, что шарики, имѣющіе плотность воды, не увлекаются проходящимъ около нихъ тѣломъ, должно придать опыту Дю-Бюа иной смыслъ, причину явленія искать въ вязкости или липкости (внутренномъ треніи), свойственной каждому тѣлу и даже воздуху. Но не въ объясненіи дѣло. И то, которое даетъ Дю-Бюа, и то, которое можно дать чрезъ сто лѣтъ послѣ него, въ наше время, не составляютъ полнаго, теоретическаго, анализированнаго толкованія, а потому пока и несущественны; различія ограничиваются, можно сказать, разностію способовъ выраженія. Дѣло въ попыткѣ —узнать явленіе въ опытѣ, да въ томъ, что оригинальный опытъ учитъ пониманію явленія больше многихъ трудныхъ измѣреній, больше цѣлыхъ сложныхъ трактатовъ [1]). Главное содержаніе статей Дю-Бюа о сопротивленіи воздуха сводится на разсчеты относительныхъ сопротивленій воздуха и воды. Приводятся опыты съ качаніями легкихъ шарообразныхъ маятниковъ въ воздухѣ, но при этомъ наблюдается не только время качаній, но и убыль амплитуды качаній. За тѣмъ сравниваются для шаровъ, движущихся въ воздухѣ (опытъ Ньютона, Робинса и Борда), найденныя сопротивленія съ тѣми, какія выводятся для воды, и оказывается, что отношеніе сопротивленій согласуется съ отношеніемъ плотностей. А чтобы знать это послѣднее, Дю-Бюа 27 сент. 1785 г. взвѣсилъ оловянный шаръ пустой, наполненный водою и наполненный воздухомъ. Барометръ показывалъ 28″3‴, шаръ, наполненный воздухомъ при 10°R., вѣсилъ въ водѣ 159,5 грановъ. Часть воздуха была выкачана насосомъ и вновь при занертомъ кранѣ въ водѣ при 10° вѣсъ былъ 42,5 грана. Чтобы узнать, сколько было выкачано воздуха, кранъ былъ открытъ подъ водою, и количество вошедшей воды оказалось равнымъ 262,416 куб. дюйм. Слѣд. этотъ объемъ воздуха вѣситъ 117 грановъ, отсюда при 10° и 28″3‴ воздухъ въ 837 разъ легче воды. Нынѣ мы знаемъ, что при 10°R=12°,5 C и при 28″3‴ (считая ртуть при 10°R) = 764,7 мм., при 12°,5 = 763,1 при 0°, отношеніе вѣсовъ воды и воздуха=999,5: 1,238, считая въ воздухѣ $^2/_3$ влажности, т. е. отношеніе = 1: 807. Слѣдовательно, одинъ, сравнительно грубый, опытъ Дю-Бюа далъ ему вѣсъ воздуха съ погрѣшностію не болѣе $4^0/_0$, что должно считать весьма удовлетворительнымъ для того времени, когда измѣрительныя средства были вообще мало выработаны и общераспространенныя свѣдѣнія о вѣсѣ воздуха гораздо менѣе этого точными (принималось чаще всего отношеніе 1:850 для 10°R). Приведенное показываетъ что Дю-Бюа должно причислить къ наблюдателямъ чрез-

[1]) Стоксъ, въ вышеупомянутомъ сочиненіи, описываетъ видѣнный имъ опытъ подобнаго же рода, когда кусочекъ листоваго золота, прикрѣпленнаго къ маятнику, не сгибаясь, колебался вмѣстѣ съ нимъ.

вычайно точнымъ, и его числамъ поэтому должно довѣрять въ значительной мѣрѣ. Не должно однако забывать, что у Дю-Бюа нѣтъ, или почти нѣтъ, чиселъ, прямо относящихся къ сопротивленію жидкостей. У него много данныхъ для опредѣленія вліянія среды на качанія маятниковъ. Въ явленіи качанія маятниковъ участвуетъ сопротивленіе, но какъ, на сколько—это остается неизвѣстнымъ послѣ чтенія изслѣдованій Дю-Бюа; да и самъ онъ это вліяніе объясняетъ спутною жидкостью, не давая возможности увѣриться въ той связи, которая существуетъ между ея количествомъ и мѣрою сопротивленія. Далѣе у Дю-Бюа много наблюденій надъ мѣрою давленія въ трубкѣ Пито при разныхъ скоростяхъ и положеніяхъ отверстія, но нѣтъ убѣждающихъ фактовъ, относящихся до связи этихъ наблюденій съ сопротивленіемъ движущагося тѣла. Мнѣ представляется это дѣло въ слѣдующемъ видѣ: тотъ напоръ твердаго тѣла на жидкость, который рождаетъ сопротивленіе, производитъ также и поднятіе жидкости въ трубкѣ Пито; оба явленія идутъ отъ одной причины, находятся въ связи, но далеко не одно и тоже: вода въ трубкѣ Пито или въ приборахъ Дю-Бюа остается неподвижною, а около сопротивляющагося тѣла непрерывно мѣняется; высота воды въ трубкѣ Пито, разсматриваемой какъ манометръ, указываетъ мѣру давленія, какъ манометръ около трубки водопровода, но она указываетъ состояніе мѣстное, мѣряетъ часть явленія, вопросъ же сопротивленія касается чего-то цѣлаго, происходящаго изъ суммы множества вліяній. Дю-Бюа тѣмъ и силенъ, что онъ сложное разбилъ на части, съумѣлъ выдѣлить долю, и притомъ крупную, изъ всей искомой суммы, указалъ вліяніе этой доли на цѣлое, но все же это не цѣлое, и все же трубка Пито, какъ понимаетъ самъ Дю-Бюа, безсильна для рѣшенія вопроса о сопротивленіи косыхъ, изогнутыхъ и вообще всякихъ другихъ кромѣ нормальныхъ плоскостей, а именно такими сложными поверхностями и ограничиваются корабли и всякіе другіе движущіеся предметы, мѣру сопротивленія которыхъ должно вывести изъ ученія о сопротивленіи жидкостей. Дю-Бюа очевидно только предвѣстникъ того, что должно ждать для знанія сопротивленія отъ опытнаго пріема его изученія.

Когда во Франціи Борда, Боссю, Кулонъ и Дю-Бюа освѣжали почву послѣ ньютоновскаго неурожая, въ Англіи тоже работали надъ вопросомъ сопротивленія, и работы прошлаго столѣтія, до начала нынѣшняго, и тамъ отличались здоровымъ и опытнымъ направленіемъ, не впали въ тѣ двѣ крайности, которыя губили и губятъ успѣхи многихъ областей опытныхъ знаній. Одна крайность — рьяное желаніе охватить умомъ и анализомъ то, чего не знаютъ еще почти нисколько. Эта крайность теперь уже не соблазняла никого, потому что Ньютонъ оказался невѣрнымъ, Эйлеръ же и Д'Аламберъ пытались поправить — тоже не смогли и отказались. И никто не рѣшался соперничать съ ними въ силѣ чистаго анализа, приложеннаго къ рѣшенію задачъ сопротивленія.

Послѣ того только, когда скопился уже запасъ данныхъ, въ самое послѣднее время, явились попытки этого рода. Они доказываютъ потребность ума въ полной теоріи явленія, но успѣхъ дѣла и нынѣ нельзя считать ни полнымъ, ни даже удовлетвортельнымъ. Крайній, хотя бы и ранній, теоретизмъ даетъ по крайней мѣрѣ толчекъ и удовлетвореніе, хотя временное, ему нельзя отказать ни въ силѣ, ни въ симпатіи. Мнѣ кажется гораздо болѣе вредною другая крайность—чисто практическая. Нужно знать сопротивленіе артиллерійскихъ снарядовъ, да кораблей. Ихъ измѣряютъ, къ полученнымъ числамъ или подбираютъ формулу, или прилаживаютъ нѣкоторыя соображенія, или дѣлаютъ то и другое и считаютъ это теоріею предмета, не заботясь о томъ, чтобы связать новые практическіе порядки съ извѣстными уже фактами, съ укрѣпившимися представленіями. Годно для существующей практики — вотъ все чего хотятъ и чѣмъ удовлетворяются. Дѣлается это будто и практично, но для практики вовсе негодно, потому что прилажено къ прошлому, недостаточно для будущаго, есть покорность факту, а не обладаніе имъ, орудіе надобности, но не власть знанія. Въ скромной, но важнѣйшей роли собирателей матеріала, необходимаго для науки, вовсе нѣтъ этой претензіи — объять однимъ рядомъ наблюденій всю сущность дѣла. Такая—практическая—крайность теперь, въ наше время, владѣетъ вопросомъ сопротивленія. Но есть чистое знаніе, плодъ пытливости ума, берущей матеріалъ отовсюду—и изъ живой практики, и изъ чистаго абстракта, полученнаго какъ плодъ добытыхъ уже знаній, и изъ случайныхъ наблюденій, и, главное, изъ измѣреній, хорошо анализированныхъ по ихъ мѣрѣ точности, да изъ опытовъ, направленныхъ на провѣрку той или другой гипотезы, зарождающейся при нѣкоторомъ знакомствѣ съ предметомъ. Этимъ путемъ идетъ истинное знаніе и доходитъ до обладанія, до полной теоріи, до указанія практикѣ, до предсказанія фактовъ, не видѣнныхъ, но узнаваемыхъ. Вотъ этотъ то путь и расчищали Борда, Боссю, Кулонъ и Дю-Бюа. На немъ же стояли англичане прошлаго столѣтія: Робинсъ, Ваинсъ, Хуттонъ, Бофуа. Не вдаваясь въ абстрактъ, не спѣша прямо дать практикѣ обликъ теоретическаго оправданія, они просто изслѣдовали сопротивленіе, изучали его мѣру, и тѣмъ послужили и для теоретиковъ и для практиковъ. Ихъ числа живутъ и теперь, ихъ надо знать, и во второй главѣ мы ихъ подробно разберемъ. У трехъ первыхъ только и есть въ изслѣдованіи, что собраніе численныхъ данныхъ, касающихся сопротивленія тѣлъ разныхъ очертаній (результатъ: числа и понятія о невѣрности ньютоновой гипотезы), но у Бофуа, кромѣ огромнаго запаса данныхъ этого же рода, есть большая новинка — опредѣленіе величины тренія. Такъ какъ этому предмету ни Ньютонъ, ни Дю-Бюа, а за ними и никто другой, не придавали почти никакого значенія (хотя о треніи упоминали), такъ какъ затѣмъ, послѣ Кулона и Бофуа, треніе стало играть все бо́льшую и бо́льшую роль въ

ученіи о сопротивленіи и такъ какъ даже въ наше время ни на что нельзя сослаться по отношенію къ опредѣленію величины сопротивленія, идущаго на треніе, какъ на Бофуа да Фроуда, слѣдовавшаго по пути Бофуа, то я считаю необходимымъ подробнѣе здѣсь остановиться на данныхъ, касающихся тренія, какъ элемента, несомнѣнно участвующаго въ сопротивленіи, а потому разсмотрю здѣсь эту сторону изслѣдованій Бофуа, другія опредѣленія котораго будутъ разобраны въ слѣдующей главѣ.

Полковникъ англійской службы, Бофуа, въ послѣдней четверти прошлаго столѣтія много занимался опытами, касающимися сопротивленія, напримѣръ качаніями маятниковъ въ жидкостяхъ, сопротивленіемъ воздуха, вѣтряными мельницами, сопротивленіямъ воды наклоннымъ плоскостямъ и т. п. Наибольшею извѣстностію пользуются его изслѣдованія, произведенныя въ самомъ концѣ столѣтія, послѣ того, когда (въ 1791 г.) основалось богатое средствами Society for the Improvement of Naval Architecture, подъ предсѣдательствомъ His Royal Highnes the Duke of Clarence. Это общество дало возможность Бофуа произвести опредѣленіе сопротивленій различныхъ большихъ моделей, длиною часто 20—40 футовъ, въ обширномъ (длина 400 ф., глуб. 11 ф.) водоемѣ гренландскаго дока близъ Лондона. Первые опыты 1793—1795 г. были сдѣланы съ досками разной формы, плавающими на водѣ. Способы наблюденія Бофуа въ сущности не отличались отъ тѣхъ, которые употребляли Борда (1763 г. черт. 26) и французскіе академики (1775 г. черт. 12), какъ видно на листахъ 4 и 5, черт. 35 и 39. Падающій грузъ тянулъ модель по водѣ и когда скорость становилась постоянною, грузъ этотъ представлялъ мѣру сопротивленія. Хотя Бофуа примѣнилъ у себя и нѣкоторыя немаловажныя улучшенія, сравнительно съ пріемами французовъ, напр. опредѣлялъ скорость механическимъ записываніемъ (при помощи самаго прибора) пройденныхъ путей [1]), достигалъ бо́льшихъ, чѣмъ были у французовъ, скоростей и т. п., но однако его первыя опредѣленія немного выгадали отъ того и не отличаются ни особою точностію, ни какимъ либо опредѣленнымъ направленіемъ, словомъ, мало вносятъ новаго въ запасъ свѣдѣній о сопротивленіи. Интересъ изслѣдованій Бофуа начинается лишь съ 1795 г., когда (см. черт. 39 и листы 6 и 7) онъ сталъ опредѣлять сопротивленія тѣлъ, вполнѣ погруженныхъ въ воду. Это потому, вопервыхъ, что до сихъ поръ вовсе не было систематическихъ опытовъ

[1]) Я избѣгаю здѣсь описанія прибора Бофуа, потому что о немъ будетъ рѣчь въ слѣдующей главѣ и еще потому, что на листахъ, представляющихъ снимки съ подлинныхъ чертежей Бофуа (равно какъ и другихъ изслѣдователей), дано краткое описаніе аппаратовъ и приведены ихъ масштабы (даны въ видѣ дробей, т. е. отношенія длины линій рисунка къ дѣйствительной длинѣ). Вообще я старался такъ составить чертежи, чтобы они облегчили знакомство съ исторіею предмета, а потому особенно заботился—взять рисунки изъ подлинниковъ.

подобнаго рода для случая прямолинейнаго движенія, да и по нынѣ опыты Бофуа (и послѣдовавшіе за ними опыты шведскихъ ученыхъ) остаются единственными въ своемъ родѣ. Достаточно напомнить, что Буржуа, Бурачекъ и др. при своихъ многообъемлющихъ изслѣдованіяхъ о сопротивленіи воды, исключительно опираются на эти опыты. Во-вторыхъ, интересъ опытовъ 1795—1798 гг. зависитъ отъ того, что часть ихъ была направлена спеціально на опредѣленіе тренія или боковаго, касательнаго (тангенціальнаго) сопротивленія, рождающагося на поверхностяхъ параллельныхъ направленію движенія, а потому прямо не участвующихъ въ сопротивленіи, которое зависитъ отъ удара тѣла о жидкость или отъ инерціи. Въ этомъ второмъ рядѣ своихъ изслѣдованій Бофуа принялъ слѣдующій способъ нахожденія сопротивленія R погруженнаго тѣла. Сперва опредѣлялись скорости v и соотвѣтственные грузы p для одного поплавка или кондуктора съ тѣмъ низпускающимся въ воду стержнемъ, къ которому прикрѣплялись потомъ тѣла. Поплавки были разныхъ формъ и размѣровъ (черт. 36, 39, 42, 52, 53, 72). Средніе добытые результаты выражались интерполаціонною формулою $p=kv^n$, гдѣ k и n постоянныя. Они даютъ возможность знать p_0, p_1 . . . для опредѣленныхъ или желаемыхъ v_0, v_1, и т. д. Затѣмъ къ стержню (примѣрно на глубинѣ 6' подъ водою) поплавка прикрѣплялось изслѣдуемое тѣло (черт. 36 и 39) и опять опредѣлялись скорости v и соотвѣтственные грузы P, и рядъ данныхъ выражался $P=Kv^m$, что давало опять возможность знать, для желаемыхъ v_0, v_1, . . сотвѣтственныя значенія P_0, P_1 и т. д. Сопротивленія погруженнаго тѣла, при скоростяхъ v_0, v_1, находились затѣмъ, вычитая p изъ P, а именно: $R=P_0-p_0$, P_1-p_1 . . . Этимъ же способомъ находилось и треніе. Для этого Бофуа прикрѣплялъ къ поплавку по направленію пути (подъ водою) длинную доску (передній конецъ или заостренный, какъ на черт. 49 и 59, или тупой, какъ на черт. 74) и для нея опредѣлялъ сопротивленія $R_0=P_0-p_0$, $R_1=P_1-p_1$,... соотвѣтствующія скоростямъ v_0, v_1. Потомъ, отпиливая весь задній длинный конецъ доски, оставлялась только самая передняя, носовая часть доски (черт. 50, 60, 75) и для нея опредѣлялось общимъ способомъ (вычитая p изъ P) сопротивленіе r_0, r_1,... отвѣчающее скоростямъ v_0, v_1.... Изъ разностей R_0-r_0, R_1-r_1.... Бофуа и находилъ треніе на поверхность отпиленной доски. Опыты этого рода были сдѣланы въ три пріема: въ началѣ 1796, въ концѣ 1796 и въ 1798 г.; послѣднимъ опредѣленіямъ Бофуа придаетъ наибольшее довѣріе[1]). Приводимъ сравненіе выводовъ для трехъ лѣтъ. Цифры выражаютъ вычисленную предшествующимъ способомъ величину силы тренія въ фунтахъ [2]) при скоростяхъ v,

[1]) Въ опытахъ 1796 г. взяты были доски, долго лежавшія въ водѣ, намокшія, а потому болѣе шероховатыя, чѣмъ въ 1798 г., но, какъ увидимъ далѣе, треніе вышло даже больше для гладкой доски 1798 г.

[2]) Бофуа вездѣ примѣняетъ англійскіе фунты adoirdupoise (предисловіе, стр. LXXIV—выноска)=16 унцій=7000 гранъ=453,5926 граммовъ.

выраженныхъ футами въ секунду, на площадь въ 50 кв. футовъ [1]). Цифры эти (и другія, далѣе приводимыя для Бофуа) взяты изъ того полнаго свода всѣхъ данныхъ, добытыхъ Маркомъ Бофуа въ Гренландскомъ докѣ, который былъ изданъ его сыномъ Генрихомъ Бофуа въ 1834 г. подъ названіемъ: Nautical and Hydraulic Experiments, by Colonel Mark Beaufoy. Vol. I (см. стр. 239, 397 и 487). Наблюденія производились при скорости отъ 1′,5 до 10′, а потому мы ограничиваемся сличеніями для скоростей въ 3, 6 и 9 футовъ, что́ принято нами и въ дальнѣйшемъ изложеніи (гл. 2) нѣкоторыхъ другихъ данныхъ Бофуа.

	Число опытовъ для длинной и коротк. доски.	$v=3'$	$v=6'$	$v=9'$
		треніе на 50 кв. футовъ поверхности Бофуа.		
Февраль 1796 года.	16 и 16	1,562	5,855	12,68
Октябрь 1796 » .	22 и 18	1,5522	5,895	12,869
Ноябрь 1798 » .	35 и 26	1,5882	6.2370	13,810
	Среднее .	1,5675	5,9957	13,119

Прежде чѣмъ разбирать подлинныя числа Бофуа, извлечемъ изъ его выводовъ тѣ слѣдствія, какія можно сдѣлать, принимая метрическую систему измѣренія.

Переводя данное среднее (взятое со стр. 487) въ метрическія мѣры, получаемъ, что при скоростяхъ 0,9144; 1,8288 и 2,7431 метра въ секунду треніе 50 кв. ф. или на 4,6450 кв. метра= =0,7110; 2,7196 и 5,9507 кило, или на 1 кв. метръ = 0,1531; 0,5855 и 1,2811 кило, что вполнѣ выражается уравненіемъ $F=-0{,}0161+0{,}0411v+0{,}1574v^2$ (I). Такъ какъ при $v=0$, треніе надо принять=0, то вѣроятнѣе допустить одно изъ слѣдующихъ выраженій: $F=Av+Bv^2$, или $F=Kv^n$; выразить же треніе пропорціональнымъ квадрату скорости невозможно, не удаляясь очень далеко отъ наблюденій. Первое выраженіе (подобное выраженіе примѣнялъ Буржуа и многіе др.) приводитъ къ формулѣ $F=v(0{,}022+0{,}1627v)$ (II), а второе къ формулѣ $F=0{,}1820\ v^{1{,}933}$ (III). Эта послѣдняя (III) формула имѣетъ такой же видъ какъ и формулы, которыя принималъ самъ Бофуа, при томъ она отвѣчаетъ хорошо среднимъ выводамъ опыта [2]), а потому заслуживаетъ нѣкотораго довѣрія и, если прилагать прямо выводъ Бофуа для изученія сопротивленій, должно пользоваться ею. Она можетъ быть удобно разсчитываема въ видѣ:

$$\log F=\log S+\log 0{,}1820+1{,}933\log v. \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

кило кв. метр. метры.

гдѣ S есть боковая поверхность въ квадратныхъ метрахъ по направленію, совпадающему съ направленіемъ пути, и гдѣ v скоро-

[1]) Футы англійскіе (=русскимъ). 1′=0,304794 метра.

[2]) Это потому только, что Бофуа всѣ свои наблюденія, какъ увидимъ далѣе, на примѣрѣ, разсчитываетъ по такой же формулѣ.

сти можно брать только отъ 0,5 до 3-хъ метровъ (около до 6 узловъ) въ секунду. При высшихъ (или низшихъ) скоростяхъ придется эксполировать, т. е. допустить что формула вѣрна и внѣ опытныхъ предѣловъ. Результаты эти могутъ быть выражены таблицею треній на 1 кв. метръ

	при скорости $v=1$ метру.	2 м.	3 м. въ секунду.
треніе по Бофуа на S кв. метровъ $=$	S 0,1820	S 0,6950	S 1,5218 кило.
коэфф. при v^2 или $k=$	0,178	0,171.	

Для промежуточныхъ скоростей можно пользоваться указаннымъ коэффиціентомъ, считая, что $F=kSv^2$. Вообще, такъ какъ при $v=1$ величина $k=0{,}182$, а при $v=2{,}5$ близка къ 0,171, то можно принять въ этой формулѣ $k=0{,}1895-0{,}0075v$, а потому $F = S\,(0{,}1895 - 0{,}0075v)v^2$. Для примѣра разочтемъ треніе въ опытѣ Боссю и Кондорсе надъ сопротивленіемъ прямоугольнаго ящика, изображеннаго на 1 листѣ, черт. 8. Его размѣры: длина 1,3 метра, погруженіе 0,65 м., ширина 0,65 м., слѣдов. трущаяся поверхность, расположенная по направленію пути $=2{,}535$ кв. метра. Высшая скорость была 0,835 м. въ секунду (все сопротивленіе тогда $=17{,}20$ кило). Для этой скорости, значеніе $k=0{,}183$, а потому треніе о бока и дно $F=2{,}535.\ 0{,}183.\ (0{,}835)^2=0{,}323$ кило.

Изложенное составляетъ прямой выводъ, сдѣланный Бофуа; намъ нечего было бы сказать относительно приложимости такого способа разсчета къ частнымъ случаямъ, еслибы, во-первыхъ, самое основаніе того пріема, которымъ Бофуа опредѣлялъ сопротивленіе, не представляло многихъ пунктовъ сомнѣнія, во-вторыхъ, еслибы Фроудъ не показалъ, что треніе, даже для досокъ, двигающихся по направленію своей длины, измѣняется по мѣрѣ ихъ удлиненія и, слѣдовательно, не представляетъ пропорціональности поверхности, и, въ-третьихъ, еслибы самъ Бофуа и масса другихъ изслѣдователей не примѣняли къ наклоннымъ плоскостямъ величину, найденную Бофуа для плоскостей, параллельныхъ къ направленію пути. Величина тренія для наклонной и нормальной площадей вовсе не опредѣляется опытами Бофуа, а потому невозможно примѣнять его данныя къ этому случаю, напр. къ опредѣленію тренія воды о поверхность корабля, тѣмъ болѣе, что къ нормальной плоскости многіе вовсе не хотятъ примѣнять никакого понятія о треніи, а здѣсь скорость воды, конечно, не ничтожна и треніе, конечно, играетъ роль. Сообразно со сказаннымъ, теперь мы и разсмотримъ сперва подробности пріемовъ Бофуа для опредѣленія тренія, а потомъ изложимъ наблюденія Фроуда, касающіяся того же предмета.

Такъ какъ наблюденія 1798 г. близки къ предшествующимъ (1796 г.) и такъ какъ самъ Бофуа предпочитаетъ свои послѣднія данныя предшествующимъ, то въ разборѣ пріемовъ Бофуа мы ограничимся только данными 1798 г. Чтобы получить ближайшее понятіе о пріемахъ опытовъ, приведемъ одинъ полный опытъ для длинной доски, и затѣмъ всѣ непосредственные выводы изъ

отдѣльныхъ опытовъ для кондуктора, длинной и короткой доски. Эти числа дадутъ намъ возможность приступить къ оцѣнкѣ выведенныхъ изъ нихъ результатовъ. Кондукторъ, длинная и короткая доска, о которыхъ будетъ здѣсь говориться, изображены на 7-мъ листѣ, черт. 72, 73 (поперечн. разрѣзъ кондуктора), 74 и 75. Тамъ же даны ихъ размѣры. Длина кондуктора 25′10″, длинной доски 14′, короткой 2′. Стержень въ разрѣзѣ эллиптическій, одинъ, укрѣпленъ въ поплавкѣ около самой его кормы, а у досокъ – на срединѣ.

Стр. 488 и XCVI: 6 ноября 1798 года. Новый кондукторъ, стержень и длинная доска, углубленіе центра 6 футъ. Темпер. воздуха 47°F, воды въ докѣ 47°F (то же или почти то же и въ другихъ опредѣленіяхъ). Глубина воды въ докѣ 12′6″. Вѣтеръ W. N. W. умѣренный. Система 4-ная (2 подвижныхъ блока, см. черт. 39). Весь грузъ 52 фунта, дѣйствующій грузъ 12 фунтовъ. Для увеличенія начальной скорости цѣпь о 12-ти звеньяхъ (см. слѣдующую главу, Бофуа).

Первый опытъ.			Второй опытъ.	
Секунды.	Пройденный путь, футы.	Разность.	Путь, футы.	Разность.
4	5,75	5,75	3,55	3,55
8	16,35	10,60	12,95	9,40
12	29,62	13,95	25,50	12,55
16	43,57	13,73	39,25	13,75
20	57,30	13,42	53,12	13,87
24	70,72	13,27	66,68	13,56
28	84,15	13,43	79,92	13,24
32	97,63	13,48	93,32	13,40
36	111,00	13,37	106,65	13,33
40	124,42	13,42	120,00	13,35
44	137,90	13,48	133,32	13,32
46	144,70	6,80	140,10	6,78
48	151,48	6,78	146,78	6,68
50	158,26	6,78	153,60	6,82
52	165,06	6,80	160,35	6,75
54	171,85	6,79	167,10	6,75

Въ каждомъ опытѣ видно, что сперва пути, проходимые приборомъ въ 4 секунды, возрастаютъ (скорость пріобрѣтается отъ груза и отъ цѣпи, которая затѣмъ достигаетъ земли и сваливается, остается одинъ грузъ), доходятъ почти до 14 футовъ въ 4 секунды (тогда еще дѣйствовалъ грузъ цѣпи, затѣмъ онъ сваливается), потомъ постепенно уменьшается и дѣлается постоянною. Затѣмъ наблюдаются положенія чрезъ 2 секунды, и послѣднія при наблюденіи одни принимаются въ разсчетъ, а потому въ разсчетъ приняты здѣсь скорости, отвѣчающія 1 секундѣ:

3,390	Среднія	3,410
3,400	3,3950 3,3866	3,375
3,395	3,3908	3,375

Найденная средняя скорость исправляется затѣмъ въ отношеніи неточности дѣленій, нанесенныхъ на линейкѣ, отмѣривающей пройденные пути. Эти поправки здѣсь=+0,0173 фута, а потому наблюденная скорость при 12 фунтахъ двигающаго груза= =3,3908+0,0173=3,4081 фута. Это значитъ, что при этой скорости сопротивленіе поплавка, стержня и дл. доски=12 фунтамъ. Очевидно изъ этого случайно (сначала) взятаго примѣра, что точность данныхъ нельзя считать достигающею до сотой фута, уже по одному тому, что тысячныя не наблюдались и въ дѣленіи шкалы были ошибки этого порядка. Собственно и въ сотыхъ фута несомнѣнно были неизбѣжныя погрѣшности, какъ видно напр. изъ того, что тотъ же приборъ, при 48 фунтахъ движущаго вѣса, далъ въ 4-хъ рядахъ, приведенныхъ на стр. 491, скорости: 6,5833; 6,5583; 6,6467 и 6,6083 фута. Среднее изъ нихъ 6,5992 не сходится со среднимъ, относящимися къ 2-мъ принятымъ въ разсчетъ опытамъ, приведеннымъ на стр. XCVII (введенія)=6,6275. Поправка на шкалу=+0,0404. Такъ и въ другихъ случаяхъ. А потому мы приводимъ далѣе только сотыя исправленныхъ среднихъ скоростей. Такъ получены слѣдующіе прямые результаты наблюденія.

Движущій вѣсъ или сопротивленіе.	12	24	36	48	60	72	96	120 ф.
Кондук.+длинная доска, испр. сред. скорости . .	3',41	4,89	5,85	6,64	7,32	8,15	9,32	10,28
Кондук+коротк. доска, испр. сред. скорости . .	3',71	5,23	6,31	7,11	7,89	8,60	9,79	11,02
Кондукторъ (со стержн. безъ доски)	4',57	6,18	7,40	8,32	—	10,01	—	—

Первое, что здѣсь бросится въ глаза: скорости при тѣхъ же грузахъ очень мало ростутъ при переходѣ отъ длинной доски къ короткой и сильно возрастаютъ при переходѣ отъ этой послѣдней къ одному кондуктору. Слѣдовательно, сопротивленіе короткой доски велико, а разность, происходящая отъ тренія, мала. Общее же опытное правило состоитъ въ томъ, чтобы сужденіе о малой искомой величинѣ выводилось по возможности независимо отъ большихъ входящихъ величинъ. Подобное правило Томсонъ и Тейтъ выставляютъ въ своей теоретической физикѣ первымъ въ ряду рекомендуемыхъ для руководства экспериментаторовъ. Если я рѣшаюсь дѣлать это замѣчаніе Бофуа, то, конечно, только потому, что важность предмета требуетъ отъ основныхъ опытовъ полной безукоризненности ихъ постановки (хотя бы точность и была не велика) и еще потому, что дальнѣйшая разборка приведенныхъ чиселъ даетъ поводъ сомнѣваться въ тѣхъ выводахъ, которые дѣлаетъ изъ нихъ Бофуа. Для того, чтобы правильно идти далѣе, необходимо вышеприведенныя данныя подвергнуть интерполированію, чтобы узнать сопротивленія, отвѣчающія даннымъ скоростямъ. Интерполированіе чиселъ первой строки (для кондуктора+длинная доска), мы ведемъ, исходя изъ двухъ сообра-

женій: 1) что при $v=0$, сопротивленіе $r=0$, и 2) что сопротивленіе близко къ пропорціональности квадрату скорости. Поэтому, мы отыскиваемъ числа $\frac{r}{v^2}$ и выражаемъ ихъ затѣмъ двучленомъ $a+bv$. Дѣля сопротивленія на квадраты скоростей, получаемъ рядъ, соотвѣтствующій кондуктору+длинная доска:

$v=3{,}41$	4,89	5,85	6,64	7,32	8,15	9,32	10,28
$\frac{r}{v^2}=1{,}03$	1,00	1,05	1,09	1,12	1,08	1,11	1,14

Изъ сравненія этихъ величинъ уже видно, что сопротивленіе ростетъ быстрѣе, чѣмъ квадраты скоростей, но возрастаніе довольно неправильно, а потому мы можемъ ограничиться двучленнымъ выраженіемъ вида $\frac{r}{v^2}=0{,}937+0{,}020v$. Поэтому разсчитываются для данныхъ v слѣдующія значенія $\frac{r}{v^2}$:

1,01 1,03 1,05 1,07 1,08 1,10 1,12 1,15.

Соотвѣтственныя разности вычисленія и опыта суть:

+0,02 −0,03 0,00 +0,02 +0,04 −0,02 −0,01 −0,01

Они показываютъ, что выражаніе

$$r=v^2(0{,}937+0{,}02v)$$

удовлетворяетъ въ достаточной мѣрѣ наблюденію. Бофуа интерполируетъ по формулѣ $r=kv^n$. Для сличенія его способа съ тѣмъ, который мы употребили въ данномъ случаѣ, найдемъ значеніе v для сопротивленій:

$r=$ 24 48 72 120 фунтовъ.

По нашей вышеприведенной формулѣ получаются значенія:

$v=$ 4,82 6,70 8,09 10,26

Разность этихъ чиселъ отъ наблюденныхъ скоростей:

+0,07 −0,06 +0,06 +0,02

не превышаетъ возможныхъ погрѣшностей опыта. Бофуа дастъ, разсчитывая по формулѣ $r=kv^n$, слѣдующія регулированныя скорости для вышеуказанныхъ значеній r (стр. 487):

4,75 6,59 7,98 10,16.

А они представляютъ отъ наблюденія разности:

+0,14 +0,05 +0,17 +0,12

То есть его разсчетъ постоянно меньше наблюденія и отступленія крупнѣе, чѣмъ по нашей вышеприведенной формулѣ. По

этой причинѣ для разбираемымъ данныхъ мы вышеприведеннымъ способомъ разсчитываемъ слѣдующія интерполяціонныя формулы:

Кондукторъ+длинная доска $R = v^2(0{,}937+0{,}020v)$.
Кондукторъ+короткая доска $R_1 = v^2(0{,}777+0{,}022v)$.
Одинъ кондукторъ $R_2 = v^2(0{,}458+0{,}027v)$.

Эти формулы даютъ возможность узнать сопротивленія при равныхъ скоростяхъ.

	скорость v=	5	10 футовъ.
Сопротив. кондукт.+длинн. доска	R =	25,9	113,7 фунт.
» » +коротк. доска	R_1=	22,2	99,7 »
» одного кондуктора	R_2=	14,8	72,8 »

Въ параллель съ этими данными приводимъ данныя, разсчитанныя для 5′ и 10′ скорости самимъ Бофуа: R=26,8 и 116,0, R_1=22,8 и 100,4; R_2=14,6 и 71,9. Сверхъ того, отъ него-же (стр. 688) беремъ величины сопротивленій для тѣлъ, имѣющихъ спереди нормальную площадь, какъ и доски, служившія для опредѣленія тренія. Таковы для 1798 г. тѣла Ja (черт. 94), Jo (черт. 95), Jh (черт. 97) и Lq (черт. 101). Передняя площадь у всѣхъ ихъ=1 кв. футу и сопротивленіе при 5′ скорости было 23,0; 22,8. 25,5; 23,3; а при 10′ скорости 87,4; 87,0; 98,0; 93,1. то есть сопротивленія мало разнятся, хотя кормовыя формы тѣлъ разныя, а потому можно принять, что при плоской передней части доски (особенно для короткой) ея прямое сопротивленіе было бы около=24 фунт. при v=5′ и около 90 фунт. при v=10′, еслибы переднія площадки досокъ были=1 кв. футу. Въ дѣйствительности площадь передняго края или сѣченіе досокъ были=0,417 кв. фута, потому что высота=1′8″, толщина 3″. Слѣдовательно, судя по вышеисчисленнымъ тѣламъ и считая сопротивленіе пропорціональнымъ площади, надо для досокъ короткой и длинной ждать прямого сопротивленія, близкаго къ 24.0,417=10 фунтамъ при скорости 5′, а для скорости 10′ близкаго къ 90.0,417=38 фунтамъ. Вычитая сопротивленіе кондуктора R_2 изъ сопрот. (конд.+коротк. доска) R_1, получаемъ разность для v=5′ R_1-R_2=7,4, что́ уже гораздо меньше вышенайденныхъ 10 фунт. Для v=10′ точно также R_1-R_2=26,9, что́ уже много менѣе 38 фунт., которые можно ждать, считая сопротивленіе процорціональнымъ площади. Считая даже, что сопротивленіе передняго конца короткой доски также мало какъ сопротивленіе тѣла Jo (черт. 95), снабженнаго длинною заостренною кормою, уменьшающею сопротивленіе, должно ждать для короткой доски при 10′ скорости сопротивленія 87,0.0,417=36,3, что гораздо болѣе найденныхъ изъ разности 26,9 фунтовъ. Что либо одно изъ трехъ: или въ наблюденіяхъ Бофуа даже въ 1798 г. заключаются большія погрѣшности, доходящія до 10 фунтовъ, а тогда судить о треніи, составляющемъ величины этихъ размѣровъ—нельзя, или же, судя по согласію повторенныхъ наблюде-

ній, должно считать неудовлетворительнымъ принятый Бофуа способъ извлеченія выводовъ изъ данныхъ опыта; или же, наконецъ, доски Бофуа имѣли спереди и въ 1798 г. такой же заостренный передній конецъ, какъ и въ 1796 г. [1]). Допустить же отсутствіе хотя бы не полной, а только приближенной, пропорціональности сопротивленій площадямъ при равныхъ очертаніяхъ и относительныхъ длинахъ — конечно, было бы совершенно неосновательно.

Такой же разсчетъ, какъ выше для короткой доски, сдѣлаемъ для длинной. Данныя для 5′ R=25,9 и для 10′ R=113,7 должны, судя по пріему Бофуа, содержать сопротивл. кондуктора+прямое сопротивленіе сѣченія+треніе, но сопрот. кондуктора=14,8 и 72,8, сопротивленіе сѣченія около=10 и 38 фунтамъ для 5 и 10′ скорости. Сумма этихъ величинъ есть 24,8 и 110,8, то есть исчерпываетъ почти всю величину найденнаго сопротивленія, а на треніе остается только 1,1 и 2,9 фунта. Величины эти вовсе не сходны съ принятыми Бофуа и выводимыми изъ разностей $R-R_1$, которыя равны 3,7 и 14,7 для 5 и 10′ скорости. Прибавимъ къ этому еще слѣдующія три замѣчанія: 1) Самъ Бофуа, интерполируя по способу, данному Хуттономъ ($r=kv^n$), получилъ иныя цифры, болѣе отдаленныя отъ дѣйствительности, чѣмъ цифры вышеприведеннаго пріема интерполированія, какъ видно было изъ примѣра, приведеннаго выше для кондуктора+длинная доска. Для 5 и 10′ онъ выводитъ изъ $R-R_1$ величину тренія 26,8—22,8=4,0 и 116,0—100,4=15,6; эти цифры больше правильно разсчитанныхъ 3,7 и 14,0 фунт. 2) Если вообще Бофуа дѣлаетъ вычитаніе изъ чиселъ сопротивленія R — тѣла+кондукторъ чиселъ для одного кондуктора R_2, чтобы найдти сопротивленіе тѣла r, то при этомъ очевидно предполагается, что сопротивленіе кондуктора остается одинаковымъ въ обоихъ случаяхъ. А это едвали согла-

[1]) Тогда прямое ихъ сопротивленіе должно бы было быть меньше, чѣмъ 10 и 38 фунтовъ при 5 и 10 футахъ скорости. Такое мнѣніе отчасти подтверждается изображеніемъ досокъ 1798 г., помѣщеннымъ въ первоначальномъ отчетѣ, который въ недавнее время я имѣлъ случай получить изъ библіотеки Гидрографическаго департамента, начальству которой я много благодаренъ за ту готовность, съ какою оно дало мнѣ доступъ къ этому богатому собранію рѣдкихъ сочиненій по морскому дѣлу. Упомянутый отчетъ озаглавленъ: The report of the Commitee for Conducting the experiments of the Society for the improvement of Naval Architecture. Въ немъ описаны опыты Гренландскаго дока за 1795—1798 гг. (имя Бофуа въ немъ не упоминается), и надо думать, что отчетъ явился въ 1799 или 1800 г. (въ отчетѣ годъ не данъ), потому что при немъ приложенъ русскій (письменный) переводъ (Г. Ѳ. Карнавина), сдѣланный въ 1801 г. На таблицѣ I этого отчета концы досокъ ясно изображены полуцилиндрически округленными. Въ отчетѣ же, публикованномъ (1834 г.) г. Бофуа (сыномъ), концы досокъ два раза (въ текстѣ и въ таблицахъ) изображены срѣзанными подъ прямымъ угломъ. Замѣтимъ, что при цилиндрически округленной передней поверхности сопротивленіе = всего 7 и 25 фунтовъ при $v=5$ и 10 фут., какъ видно для тѣлъ *Ka* и *Ko* (листъ 7, черт. 92, 93), мидель которыхъ = 1 кв. футу. Эти числа даютъ для передняго сопротивленія черезчуръ малыя величины для досокъ, а именно 3 и 10 фунтовъ (считая сопрот. пропорц. миделю).

сно съ дѣйствительностью. Достаточно взглянуть на чертежи кондукторовъ Бофуа и обратить вниманіе на мѣсто стержня, бывшаго въ опытахъ 1798 г., чтобы видѣть необходимость измѣненія въ положеніи движущагося поплавка послѣ прикрѣпленія къ нему тѣла. Грузъ тѣла и величина сопротивленія должны измѣнять въ покоѣ и въ движеніи положенія поплавка, влекомаго веревкою, привязанною къ носу поплавка, да еще сверху. Если же допустить, какъ это необходимо, нѣкоторую перемѣну положенія поплавка на водѣ (различіе дифферента на носъ или на корму, измѣненіе погруженія) въ случаѣ прикрѣпленія къ нему тѣлъ, то сопротивленіе поплавка въ этомъ случаѣ будетъ не то, какое при движеніи его одного, а потому изъ R надо вычитать не R_2, а нѣкоторую другую величину, чтобы найдти r. Этимъ только способомъ можно объяснить то, что нашли мы выше для кондуктора + длинная доска. 3) Если же къ стержню кондуктора прикрѣпляются примѣрно однообразныя тѣла — кренъ будетъ примѣрно тотъ же, и числа выйдутъ, очевидно, согласныя, какъ это и замѣчаемъ для случая тѣлъ Jo, Ja, Jh, Lq и случая короткой доски. Тѣла здѣсь малыя, сопротивленія дѣйствуютъ почти на одинаковыя мѣста и т. п., а потому выводъ изъ однихъ тѣлъ прилагается къ другимъ. Это не значитъ однако, что выводъ вѣренъ. Путь R_2 есть сопротив. свободнаго кондуктора, R_0 сопротив. конд.+одно тѣло, R_1 сопрот. конд.+другое тѣло, подобное вышеприведенному, и пусть R_3 есть неизвѣстное сопротивл. кондуктора въ томъ его положеніи. когда къ нему прикрѣплены тѣла. Истинныя мѣры сопротивленій тѣлъ будутъ $R_0 - R_3$ и $R_1 - R_3$, но не $R_0 - R_2$ и не $R_1 - R_1$, а однако разность истинныхъ сопротивленій двухъ тѣлъ будетъ, очевидно, равна разности невѣрныхъ чиселъ $R_0 - R_1 = (R_0 - R_2) - (R_1 - R_2)$. Поэтому можно сравнивать (арифметически, но не геометрически) невѣрно найденныя сопротивленія тѣлъ подобныхъ и достигать совершенно вѣрнаго вывода. Но если прикрѣпляются тѣла совершенно иного вида, напримѣръ вмѣсто короткаго длинное, вмѣсто легкаго тяжелое, какъ это и есть при замѣнѣ большой доски малою, то точное сравненіе невозможно, потому что тогда въ двухъ случаяхъ положеніе поплавка будетъ разное и незвѣстная величина сопротивленія поплавка въ обоихъ случаяхъ будетъ иная, а потому тогда, идя обычнымъ способомъ, какимъ шелъ Бофуа, получатся числа несравнимыя между собою [1]).

---

[1]) Изъ морской практики извѣстно, что сопротивленіе значительно мѣняется при кренѣ на носъ или на корму, но такъ какъ зависимость этого измѣненія отъ формы тѣлъ неизвѣстна, то и нельзя нынѣ подвергнуть подобные случаи разсчету. Бофуа долженъ былъ бы, еслибы выяснилъ указанныя причины погрѣшности своихъ опытовъ, устранять ихъ, опредѣляя сперва кренъ и углубленіе, а потомъ поправляя ихъ перемѣщеніемъ и наложеніемъ особыхъ грузовъ, или же опредѣляя для кондуктора сопротивленіе при разныхъ углахъ крена и углубленіяхъ Вопросъ этотъ самъ по себѣ представляетъ интересъ и можетъ служить предметомъ опытнаго изслѣдованія большой важности.

Итакъ въ числахъ, данныхъ Бофуа для бокового тренія, должно подозрѣвать погрѣшность, имъ нельзя *вполнѣ* довѣрять. Боковое треніе, вполнѣ доказываемое опытами и измѣреніями Кулона (сдѣланными послѣ Бофуа), въ опредѣленіяхъ Бофуа пріобрѣтаетъ только приближенное численное значеніе, и не будь опытовъ Кулона, съ одними опытами Бофуа можно было бы даже сомнѣваться въ самомъ существованіи бокового тренія, тѣмъ болѣе, что, употребляя длинную доску, при малѣйшемъ уклоненіи отъ параллеллизма ея оси съ осью поплавка, можно ждать возростанія сопротивленія не отъ тренія, а отъ одного уклона, и еще потому, что, судя по опытамъ французскихъ академиковъ и Дю-Бюа, можно ждать для призматическаго тѣла даже уменьшенія сопротивленія при нѣкоромъ возрастаніи длины. Впрочемъ, есть одно обстоятельство, которое говоритъ въ пользу чиселъ для тренія, данныхъ Бофуа; это именно—согласіе его опредѣленій 1796 г. съ данными 1798 г. Если взять эти послѣднія и принять разность $R—R_1$ за треніе (стр. 55), то по разсчету оно равно 3,7 и 14,0 фунтамъ для $v=5$ и $10'$. Боковая поверхность отрѣзанной доски $=12'\,(1\frac{2}{3}+\frac{1}{4})\,2=46$ кв. ф. Поэтому для скоростей 5 и $10'$ треніе въ опытахъ 1798 г. выходитъ на 50 кв. футовъ равнымъ 4,0 и 15,2 фунта, а не 4,36 и 16,97, какъ принимаетъ Бофуа (стр. 487). Въ опытахъ 1796 года для $5'$ скорости получены числа, очень близкія къ 4,0 фунт., а именно 4,1 и 4,2, а для $v=10'$ въ 1796 году Бофуа выводитъ треніе на 50 кв. футовъ равнымъ 15,5 и 15,8 фунт.; это опять близко къ 15,2, опредѣляемымъ изъ опытовъ 1798 г. Это даетъ въ среднемъ для $v=5'$ треніе на 50 кв. ф. $r=4,1$ фунта, для $v=10'$ треніе $=15,5$ фунтовъ, что̀ выражается общею формулою $r=v^2\,(0,173—0,0018v)$. Далѣе (именно, при разборѣ опытовъ Фроуда) мы увидимъ, что выраженіе $f=av+bv^2$ лучше и проще другихъ отвѣчаетъ тренію, а потому изъ среднихъ данныхъ Бофуа ($v=5$, $r=4,1$; $v=10$, $r=15,5$) выводимъ, что треніе f на плоскостяхъ параллельныхъ пути:

$$f=s\,(0,0018v+0,00292v^2)$$ англ. фунт. на s кв. футъ,

или:

V.... $f=S\,(0,029v+0,1536v^2)$ кило на S кв. метровъ.

Это выраженіе даетъ треніе по Бофуа съ точностью большею, чѣмъ предшествующія выраженія II, III и IV. При грубомъ приближеніи можно считать

VI.... $f=Sv^2 0,16$ кило на S кв. метровъ.

Важнѣе же всего замѣтить, что при тѣхъ малыхъ скоростяхъ (сантиметры въ секунду), съ какими имѣлъ дѣло Кулонъ (стр. 27), треніе почти пропорціонально 1-й степени скорости, а здѣсь (скорость—метры въ сек.) почти второй степени. Только будущіе, новые опыты рѣшатъ: зависитъ ли это отъ того, что у Кулона было

движеніе колебательное, а здѣсь поступательное, или только отъ разности скоростей?

Основные недостатки, свойственные опытнымъ пріемамъ Бофуа, вполнѣ устраняются въ новѣйшихъ опредѣленіяхъ бокового тренія, произведенныхъ въ Англіи же, въ 1872—1874 гг., Фроудомъ. У него не поплавокъ, а тележка на рельсахъ, идущихъ поверхъ длиннаго канала съ водою, а потому нѣтъ возможности сомнѣваться въ томъ, что доска, прикрѣпленная къ тележкѣ, измѣняетъ ея положеніе. Притомъ у него опредѣляется не грузъ, нужный для сообщенія скорости тележкѣ и доскѣ, треніе которой опредѣляется, а у Фроуда на тележкѣ пружина, которая растягивается, какъ динамометръ, отъ силы сопротивленія доски. Затѣмъ у Фроуда передній конецъ доски заостренный (черт. 104. листъ 8), потому прямое сопротивленіе отъ передняго конца доски малое, такъ что почти одно треніе доски о воду и вліяетъ на мѣру удлиненія динамометрической пружины, состояніе которой во все время записывается (регистрируется) на вращающемся цилиндрѣ, находящемся на тележкѣ (листъ 8, черт. 103). У Бофуа треніе только малая доля ($\frac{1}{6}$) всего сопротивленія, у Фроуда всѣ побочныя вліянія составляютъ только ничтожную ($\frac{1}{20}$) долю тренія. Кромѣ всего этого Фроудъ беретъ доски не двухъ, а многихъ размѣровъ (листъ 9, черт. 107), а именно длиною отъ 6 дюймовъ до 50 футовъ. А все же, при всѣхъ этихъ усовершенствованіяхъ, Фроудъ есть только прямой продолжатель Бофуа. Пріемы ихъ въ сущности тѣже. У обоихъ доска движется въ водѣ вдоль своей оси, помѣщается ребромъ. Тоже у обоихъ стремленіе взять у природы числа, нужныя для англійскаго мореплаванія, при помощи колоссальныхъ средствъ [1]) богатой страны, увеличивая размѣры изслѣдованія, даже тѣже почти длины, удивляющія величиною—у Бофуа въ первомъ опытѣ, 11 октября 1793 г., была доска въ 42,198 футовъ длиною, у Фроуда—въ 50 футовъ. Размѣры эти могутъ казаться полезными для опыта техническаго, но для установки основныхъ научныхъ вопросовъ нужны не эти многосаженные размѣры, а нужно главнѣе всего спокойное, критическое и разностороннее отношеніе къ опыту, которое убивается при этихъ невозможныхъ для научнаго изслѣдованія размѣрахъ. Мы видѣли, что сдѣлалъ и что упустилъ Бофуа, посмотримъ, что сдѣлалъ Фроудъ, и увидимъ, не упустилъ ли и онъ чего либо, задавшись обширными размѣрами

[1]) Генр. Бофуа въ предисловіи (p. XXXII) говоритъ о томъ, что опыты его отца и шведскіе опыты стоили до 50000 фунтовъ стерлинговъ, что на наши деньги составитъ около полумилл. руб. Опыты Фроуда потребовали громадныхъ средствъ англійскаго адмиралтейства, судя по тому, что устроено для нихъ особое зданіе надъ длиннымъ водоемомъ, заведены особый двигатель и цѣлая система приспособленій. Эти богатыя средства, данныя Англіею для изученія сопротивленія, надо сознаться, принесли малые плоды, оставили почти все неразрѣшеннымъ, что было ранѣе не разрѣшено, мнѣ кажется потому преимущественно, что были черезчуръ близкими къ размѣрамъ и задачамъ практики; чистая наука была въ сторонѣ.

опытныхъ изслѣдованій. Впрочемъ, относительно Фроуда нельзя слѣдовать тому пріему, какому мы слѣдовали, излагая наблюденія Бофуа.

Изслѣдованія этого послѣдняго описаны вполнѣ, каждый опытъ данъ со всѣми своими числами, даже, пожалуй, есть излишекъ, роскошь чиселъ — громадный томъ — весь изъ цифръ, добытыхъ Бофуа. Все же то, что публиковано относительно опытовъ Фроуда, можетъ быть вмѣщено на печатномъ листѣ, и ни одинъ опытъ не данъ въ видѣ сырыхъ, прямо полученныхъ чиселъ; извѣстны только выводы, результаты. Развѣ нынѣ, когда Фроудъ уже потерянъ для науки, соберутся публиковать его подлинныя данныя. Въ прошломъ 1878 году, когда Фроудъ былъ еще живъ, я получилъ, по его обязательности, чрезъ посредство В. И. Святскаго, единственные—это его слова—имѣющіеся въ печати отчеты объ его изслѣдованіяхъ. Такъ какъ они невелики и помѣщены въ изданіи сравнительно рѣдкомъ, въ отчетахъ британской ассоціаціи для движенія наукъ (Report of the British Association for the avancement of Science, 1872—Brighton, page 118 и 1874—Belfast, page 219), то я считалъ за наилучшее приложить къ этому изданію полный переводъ двухъ рапортовъ Фроуда (приложенія 6 и 7-е) и снять (листы 8 и 9) рисунки и діаграммы, которыми снабжены отчеты Фроуда. Это избавляетъ меня отъ изложенія пріемовъ изслѣдованія и передачи хода мыслей Фроуда о треніи. Мнѣ остается лишь указать на способъ постановки вопроса о сопротивленіи, бывшій въ виду у Фроуда, и затѣмъ высказать мои соображенія, касающіяся его опытовъ. При этомъ я буду предполагать, что прилагаемые здѣсь переводы статей Фроуда уже прочтены читателемъ.

Какъ смотритъ Фроудъ на сопротивленіе, видно изъ его чтенія, помѣщеннаго въ приложеніи 8-мъ (и можетъ быть найдено желающими въ „Морскомъ Сборникѣ“ за 1877, № 4-й). Это изложеніе понятій Фроуда о сопротивленіи воды сдѣлано имъ въ Кензингтонскомъ музеѣ въ 1876 году, во время бывшей тогда въ Лондонѣ выставки научныхъ приборовъ и послѣ ряда его различныхъ опытовъ, а потому заключаетъ, такъ сказать, вѣнецъ изслѣдованія. Достаточно сличить это изложеніе съ тѣмъ, которое выражаетъ сущность фрикціонной теоріи Ранкина („Морской Сборникъ“ 1867 № 12), чтобы видѣть, что Фроудъ — прямой послѣдователь этой теоріи. Для нея корабль съ правильными обводами требуетъ для приданія ему опредѣленной скорости нѣкоторой силы совершенно по иной причинѣ, чѣмъ угловатая модель, хотя бы такая какъ въ опытахъ Боссю (черт. 7) или въ опытахъ Бофуа (листъ 6, 7), У модели работа двигателя идетъ на сообщеніе нѣкотораго количества движенія водѣ, образующей водовороты впереди, подлѣ и за моделью, у корабля же съ должными образованіями работа двигателя идетъ исключительно на образующіяся волны, да на треніе воды о бока корабля. Таково положеніе теоріи Ранкина. Мы возвратимся къ этому предмету далѣе, теперь намъ важно

лишь указать на то, что Фроудъ держался фрикціонной теоріи, а она въ треніи видитъ главную затрату двигателя, главную причину сопротивленія, хотя бы для корабля, если не для угловатой модели. Немудрено, что Фроудъ направляетъ средства англійскаго адмиралтейства и всѣ свои силы для опредѣленія величины тренія на бока корабля. Изслѣдованія Фроуда приводятъ его къ тому, что треніе на движущуюся длинную доску не пропорціонально поверхности, а уменьшается съ ея длиною, примѣрно такъ, что если близъ самаго носа на 1 кв. футъ гладкой поверхности, при скорости 10′ въ секунду, треніе около=0,4 фунта, то на разстояніи 50 футовъ отъ носа приходится лишь около половины этой величины [1]). Въ среднемъ величина эта близка къ данной Бофуа, который даетъ для $v=10'$ $r=\frac{15,5}{50}=0,31$ фунта. Измѣненіе тренія со скоростью у Фроуда выходитъ такое же почти, какъ у Бофуа, то есть треніе почти пропорціонально 2-й степени скорости. Такъ средняя степень n^2 скорости для гладкихъ поверхностей (какъ парафинъ, олово) при доскѣ длиною 2 фута=2,04, при длинѣ 8 ф. она=1,93, при длинѣ 20′ она=1,90, при 50′ длины она=1,83. Здѣсь она явно уменьшается съ длиною. Но для опытовъ, сдѣланныхъ Фроудомъ съ досками, покрытыми пескомъ (3-хъ разныхъ степеней мелкости), сопротивленіе возрастаетъ съ большою правильностію постоянно пропорціонально квадрату скорости. Это послѣднее обстоятельство, въ связи съ тѣмъ, что, по опытамъ Бофуа, треніе растетъ пропор-

---

[1]) Въ 7-мъ приложеніи дана таблица чиселъ, выведенныхъ Фроудомъ. На листѣ 9-мъ даны діаграммы, выражающія результаты его наблюденій. Изъ совокупности чиселъ видно, что гладкія поверхности представляютъ почти одиковыя сопротивленія, покрыты ли онѣ лакомъ, парафиномъ или оловомъ. Для этихъ средн. результатъ. для 10′ скорости: треніе на 1 кв. футъ при разстояніи $d=2'$, $r=0,352$; при $d=8'$, $r=0,262$; при $d=20'$, $r=0,240$ и при $d=50$, $r=0,229$. Очевидно изъ характер данныхъ, что сопротивленіе при $d=0$ будетъ представлять нѣкоторую величину, а при большомъ возрастаніи длины, r стремится къ нѣкоторому постоянному предѣлу, а потому зависимость r отъ d можно выразить формулою $r=0,223+\frac{0,647}{1+2d}$, которая хорошо согласуется съ выписанными средними. Интегрируя отъ 0 до d, получимъ сопротивленіе для доски шириною въ 1 футъ, длиною въ d футовъ $R=0,223\,d+0,745\log.(1+2d)$, что даетъ съ достаточною точностью (для скорости 600 футъ въ минуту) точки соотвѣтственной кривой, изображенной на черт. 108 (листъ 9). При $d=14'$, какъ было у Бофуа въ 1798 г., для $v=10'$, по выведенной выше интегральной формулѣ, вычисляется $R=4,293$, слѣдовательно на 1 кв. футъ треніе равно 0,307, а на 50 кв. ф.=15,35 фунта, судя по даннымъ Фроуда, а по опытамъ 1798 Бофуа, какъ мы видѣли выше, треніе=15,2 фунта. Отсюда видно, какое замѣчательное сходство представляютъ данныя Фроуда и Бофуа о треніи. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы увидимъ однако, что, взявъ прямыя данныя Фроуда (съ діаграммъ), есть поводъ думать, что треніе не зависитъ отъ длины доски, а оказалось у Фроуда такимъ лишь отъ того, что онъ не различилъ сопротивленія носа и кормы, бока которыхъ наклонны къ пути, отъ сопротивленія тѣхъ частей доски, которыя дѣйствительно не имѣютъ наклона и параллельны съ направленіемъ движенія.

[2]) Въ формулѣ сопротивленія $r=kv_n$.

ціонально 1,933 степени скорости, противопоставленное съ тѣмъ, что въ опытахъ Кулона треніе растетъ пропорціонально 1 (первой) степени скорости, требуетъ отнестись съ надлежащею разборчивостію ко всѣмъ подробностямъ англійскихъ опытовъ о треніи, тѣмъ болѣе, что Кулоновы опыты ведены по способу совершенно хорошо нынѣ изслѣдованному и представляющему всѣ условія точнаго научнаго опыта, хотя и сдѣланы въ маломъ видѣ, и при непостоянныхъ скоростяхъ круговаго качательнаго движенія. Разбирая пріемы и способъ извлеченія выводовъ Бофуа, мы видѣли тамъ поводы сомнѣнія въ численныхъ результатахъ. Внимательный разборъ того, что̀ извѣстно объ опытахъ и выводахъ Фроуда, не освобождаетъ и эти послѣдніе отъ нѣкоторыхъ поводовъ къ сомнѣнію.

Важнѣйшее изъ обстоятельствъ, бросающихся въ глаза при разборѣ отчетовъ Фроуда, касается его способа разсчета величины тренія изъ показаній динамометра. Очевидно, что кромѣ истиннаго тренія о поверхности, параллельныя съ направленіемъ пути, въ показаніяхъ динамометра должны участвовать еще слѣдующія величины сопротивленій: 1) сопротивленіе воздуха на подвижныя части динамометрическихъ приспособленій; 2) сопротивленіе воды на тотъ стержень, который скрѣпляетъ подвижныя части динамометра съ металлическою носовою частію доски; 3) сопротивленіе воды на выдающіяся части доски или ея неровности, столь значительныя въ томъ случаѣ, когда доски покрыты пескомъ или коленкоромъ и сравнительно малыя для досокъ гладкихъ, покрытыхъ лакомъ, парафиномъ, оловомъ или саломъ [1]; 4) сопротивленіе воды на толщу доски, на ширину ея или сѣченіе, зависящее отъ формы носа и кормы или отъ угловъ встрѣчи и отступленія воды и движащагося тѣла (если кому угодно это принять за треніе, то все же оно будетъ иное, чѣмъ для параллельныхъ площадей, а именно треніе о наклонныя плоскости, около которыхъ скорость больше, чѣмъ у паралл. плоскостей); 5) сопротивленіе верхней и нижней кромки доски отъ возможности гнутія, зависящаго не только отъ нѣкоторой разности въ плотностяхъ воды и доски, но еще и отъ того, что во время движенія легко могутъ родиться такія силы, которыя выведутъ ось доски изъ ея параллелизма съ рельсами, по которымъ движется динамометръ, и 6) сопротивленіе отъ

[1]) Для практики, напримѣръ, для мореходнаго дѣла, конечно, внѣшняя поверхность корабля можетъ быть разсматриваема, какъ поверхность, сопротивляющаяся ходу только вслѣдствіе тренія. Такъ глядитъ и Фроудъ. Но въ научномъ смыслѣ, конечно, не все равно, какова поверхность. Если представить, напримѣръ, поверхность судна, покрытою всю водорослями, ракушками и т. п. возвышеніями, то сопротивленіе отъ нихъ возрастетъ не въ силу одной увеличенной и новаго свойства поверхности, но и въ силу того, что по новой поверхности будутъ входящіе и выступающіе углы, около которыхъ рождается прямое сопротивленіе, въ видѣ ли водоворотовъ или просто отъ новаго дѣйствія инерціи, но во всякомъ случаѣ отъ того же самого, отчего пластина, поставленная противу теченія или движимая въ водѣ, представляетъ прямое сопротивленіе.

возможности гнутія тонкихъ и длинныхъ досокъ вправо и влѣво отъ ихъ первональнаго параллельнаго рельсамъ направленія и отъ возможности колебательныхъ, т. е змѣеобразныхъ или волнообразныхъ движеній длинной тонкой доски.

Только первое изъ вышеупомянутыхъ сопротивленій прямо опредѣлено Фроудомъ, дано имъ на діаграммахъ (напр. E на черт. 105 и D на черт. 106) и, конечно, вычтено, изъ наблюдаемаго показанія динамометра въ окончательныхъ результатахъ, напр. тѣхъ, которые нанесены на черт. 108, 109, 110. О второмъ родѣ добавочнаго сопротивленія Фроудъ не упоминаетъ, оно ясно само по себѣ и, конечно, имъ принято во вниманіе. Можно даже думать, что подъ словами «и т. п.» [1]), стоящими въ изъясненіи, сопровождающемъ діаграммы, на которыхъ нанесены линіи E и D (черт. 105 и 106), что подъ ними Фроудъ подразумѣвалъ столь очевидное сопротивленіе воды на верхній брусъ, скрѣпляющій динамометръ съ доскою и погруженный отчасти въ воду [2]). Весьма важно третье добавочное сопротивленіе—отъ неровностей. Фроудъ получилъ для песчаныхъ поверхностей и для коленкора большее треніе, чѣмъ для гладкихъ поверхностей, и, судя по всему тону изложенія своихъ статей, приписываетъ это качеству поверхностей, т. е. прежде всего ихъ природному, такъ сказать, химическому различію, а затѣмъ ихъ механическому сложенію. Что такъ, а не какъ иначе Фроудъ понимаетъ при этомъ слово *качество* (quality of the surface) поверхности, видно изъ того, что онъ отдѣльно приводитъ въ обоихъ своихъ рапортахъ и даже въ діаграммахъ, сопротивленіе одинаковыхъ досокъ, покрытыхъ лакомъ, составомъ Гэ, парафиномъ и т. п. Небольшія разности чиселъ онъ приписываетъ, очевидно, разности поверхностей. Это съ руки грубой практикѣ, въ которой вѣрятъ подобнымъ предразсудкамъ. Но научной критики такое сужденіе выдержать не можетъ. Кулонъ въ своемъ изслѣдованіи явно доказалъ, что смазка саломъ ничего не измѣняетъ въ треніи, и доказалъ это съ тѣмъ же дискомъ, съ которымъ сдѣлалъ опредѣленіе до и послѣ смазыванія саломъ,—это пріемъ вѣрный. Еслибы онъ взялъ два разныхъ диска, одинъ смазалъ, а другой нѣтъ, и вышла бы разность, онъ не могъ бы сдѣлать своего вывода. А Фроудъ сдѣлалъ именно такой выводъ: взялъ именно разныя доски, а не одну и ту же, до и послѣ смазки. Вся разность отдѣльныхъ опредѣленій Фроуда для разныхъ гладкихъ досокъ при разной покрышкѣ, по всему вѣроятію, зависитъ только отъ того, что для каждой смазки брались имъ отдѣльныя доски, или толщина наносимыхъ слоевъ была неодинакова, или, что отчасти видитъ и самъ Фроудъ, при разныхъ смазкахъ степень неровностей у по-

---

[1]) По англійски стоитъ напр. для объясненія линіи E (черт. 105) слѣдующее: EE. Air resistance of Apparatus Supporting Plane etc.

[2]) При подобномъ подробномъ разборѣ Фроуда становится очевиднымъ и ясно ощутительнымъ недостатокъ подробныхъ отчетовъ объ его опытахъ.

верхностей досокъ была неодинакова. Еслибы мы имѣли подробный отчетъ отдѣльныхъ опытовъ, то можно было бы рѣшить это съ полною увѣренностію, особенно еслибы было нѣсколько отдѣльныхъ досокъ съ одною покрышкою. Теперь же намъ можно судить только о результатахъ, выраженныхъ діаграммами. Если наприм. сличить кривыя $A'A'$ (черт. 105), отвѣчающія покрышкѣ лакомъ и составомъ Гэ, то очевидно, что вездѣ, т. е. при всѣхъ скоростяхъ, вторая даетъ меньшее сопротивленіе, чѣмъ первая. Но тутъ же рядомъ приведены данныя для доски съ тупымъ носомъ,—тѣ еще больше. Тутъ причина чисто механическая и постоянная, нарочно взятая, а при переходѣ отъ одной поверхности къ другой, конечно, также было различіе механическое (толщина слоя, гладкость, вліяніе смазки на матеріалъ доски, т. е. на дерево и т. п.)— ему прежде всего и надо приписать разность результатовъ. На черт. 109 и 110 ясно, что гладкія поверхности представляютъ чрезвычайно близкія числа, рѣзко отличающія эти поверхности отъ шероховатыхъ и песчаныхъ. Пока нѣтъ численныхъ доказательствъ относительно такой степени точности пріемовъ Фрауда, которая удостовѣряла бы, что *разныя доски* одного и того же размѣра и одной покрышки даютъ числа между собою согласныя въ гораздо большей степени, чѣмъ такія же доски только при одномъ различіи поверхностей, до сихъ поръ нѣтъ основанія, послѣ опытовъ Кулона, допускать какое либо различіе въ сопротивленіи досокъ, отличающихся только качествомъ своей одинаково-гладкой поверхности. Поэтому данныя для всѣхъ гладкихъ поверхностей слѣдуетъ считать пока одинаковыми и средній для нихъ выводъ принимать за вѣроятнѣйшій. Мы постараемся теперь получить изъ подлинныхъ діаграммъ (воспроизведенныхъ въ уменьшенномъ видѣ на листѣ 9-мъ) Фроуда средній выводъ, для средней гладкой доски разной длины при разныхъ скоростяхъ. Для того, чтобы воспользоваться всѣми нанесенными на діаграммы наблюденіями съ гладкими досками разной длины, мы поступаемъ такъ. Для данной длины отбираемъ изъ каждой діаграммы нѣсколько чиселъ, выражающихъ при данной скорости мѣру сопротивленія, потомъ, взявъ среднее изъ нихъ, дѣлаемъ въ немъ поправку на сопротивленіе воздуха, руководясь числами, отвѣчающими линіямъ E и D (черт. 105 и 106), затѣмъ на основаніи эти чиселъ можно будетъ уже идти далѣе.

Числа, взятыя съ діаграммъ для всякихъ гладкихъ досокъ.

Означаемъ d длину досокъ въ футахъ; v скорость футъ въ минуту (какъ дано на діаграммахъ). Они даны въ заголовкѣ столбцовъ, а въ столбцахъ даны соотвѣтственныя сопротивленія въ фунтахъ (число взятыхъ точекъ дано въ скобкахъ; если его не дано, взята одна точка). Ширина всѣхъ приведена къ одному футу окружности доски, и всѣ данныя исправлены на сопротивленіе воздуха и т. п. Качество подлинныхъ чертежей Фроуда и ихъ размѣры даютъ увѣренность только въ десятыхъ фунта, а за сотыя нельзя отвѣчать, по крайней мѣрѣ для досокъ длиною въ 50—55 футъ.

	Длина доски формы.	v=100′	200′	400′	600	800′
Черт. 105	d = 50	r = 0,38	1,64(3)	5,93(3)	12,53(3)	—
Черт. 110	50	0,46	1,68	5,87	12,40(2)	—
Черт. 105	28	0,27	1,01	3,64	7,73	13,0
Черт. 109	20	0,20	0,70(3)	2,50(3)	5,37(3)	—
Черт. 105	16	0,16	0,54(3)	2,14(3)	4,51(3)	—
Черт. 110	8	—	0,27(3)	1,05(3)	2,40(3)	4,3 (3)
Черт. 105	5	—	0,16(2)	0,80(2)	1,96(2)	3,4 (2)
Черт. 106 [1])	2,5	—	0,13(2)	0,50(2)	1,05(2)	1,83(2)
Черт. 109	2	—	0,10	0,35(3)	0,70(3)	1,2 (3)
Черт. 109	1,5	—	0,06(2)	0,26(2)	0,58(2)	1,03(2)
Черт. 109	1	—	0,03(2)	0,13(2)	0,32(2)	0,59(2)

Эта таблица въ сущности не отличается отъ діаграммы черт. 108 — ничѣмъ инымъ кромѣ того, что она включаетъ опыты съ гладкими досками не только перваго, но и 2-го отчета Фроуда (приложенія 6 и 7) и сверхъ того она по возможности прямо выражаетъ *опытныя данныя* Фроуда, исправленныя въ отношеніи сопротивленія воздуха, а не выражаетъ, какъ черт. 108-й, *выводы* Фроуда. Чтобы удобнѣе было прослѣдить за дальнѣйшими разсчетами, я интерполировалъ [2]) полученныя среднія числа и нашелъ слѣдующія величины, которыя, въ сущности, представляютъ просто сводъ прямыхъ результатовъ наблюденій Фроуда надъ гладкими досками [3]).

Длина доски, футы.	Поверхность, кв. футы.	въ минуту. $v=200'$	$v=400'$	$v=600'$
50	50	1,65 (4)	5,91 (4)	12,48 (5)
20	20	0,69 (7)	2,58 (7)	5,48 (7)
7	7	0,23 (5)	0,97 (5)	2,27 (5)
2	2	0,09 (7)	0,34 (9)	0,72 (9)

[1]) Изъ данныхъ 106-го чертежа взяты только тѣ, которыя относятся къ доскамъ, имѣющимъ острый или округленный носъ или корму, какъ и для досокъ другой длины. При срѣзанной кормѣ (черт. 104 *A*, *B*) сопротивленіе гораздо больше.

[2]) Лучше сказать, только регулировалъ данныя первой таблицы. Напр. изъ данныхъ для 28, 20 и 16′ длины найдено регулированное данное для 20′, пользуясь наблюденіями для длины 50′ и 8′ съ 5′. Напр. для 50′ длины при $v=200'$, $r=1{,}65$, для той же скорости при длинѣ средней между 8 и 5, т. е. при длинѣ 3. 8+2.5): 5 равной 6′,8 (такъ взято, пот. что для 8′ есть 3 наблюденія, а для 5′ только 2), $r=0{,}25$ въ первомъ приближеніи, а потому можно считать, что на каждый футъ (между 50 и 6′) длины сопротивленіе растетъ на (1.65—0,25): (50—6,8) = 0,032 фунта, а потому для перехода отъ длины въ 28′ къ длинѣ въ 20′ должно вычесть изъ 1,01 (см. таблицу) величину равную 0,032 (28 −20)=0,256, а потому, судя по числу для 28′, получаемъ для 20′ длины число 1,01 − 0,256 = 0,754, его взять слѣдуетъ 1 разъ для полученія средняго, пот. что взято оно изъ 1-го наблюденнаго числа. Такъ изъ даннаго для 16′ получено для 20′ число 0.54+0,128. Среднее, регулированное для 20′, будетъ =0.754+3. 0,70+3. 0,668=7. 0,694. Такъ найдены и всѣ остальныя числа таблицы изъ данныхъ, относящихся до ближайшихъ по размѣрамъ досокъ. Для обозначенія того, какія данныя взяты вмѣстѣ, въ предшествующей таблицѣ, соединены скобкою тѣ числа, которыя служили для одного вывода слѣдующей таблицы.

[3]) Въ этой таблицѣ уже нѣтъ данныхъ ни для $v=100$, ни для $v=800'$, потому что они не могли быть взяты съ діаграммъ для всѣхъ досокъ.

Изъ этого свода среднихъ опытныхъ данныхъ Фроуда становится очевиднымъ, что, какъ первое приближеніе, можно допустить, съ одной стороны, что треніе гладкихъ поверхностей, послѣ нѣкоторой ихъ длины, постоянно или пропорціонально длинѣ и съ другой, что мѣра (коэффиціентъ) этой пропорціональности, въ свою очередь, пропорціональна нѣкоторой функціи скорости, которая близка къ v^2. А потому можно принять

$$r = v^2 \, f(v) \, (A + Bd),$$

гдѣ A и B постоянныя, а $f(v)$ можетъ быть, въ первомъ приближеніи, принята за $1 - Cv$ или за $1 + \frac{D}{v}$. Придавая первое значеніе $f(v)$, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$r = v^2 \, (1 - 0{,}00032\, v) \, \frac{1 + 0{,}866\, d}{1000000} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VII}$$

Тогда вычисленныя сопротивленія суть:

	v=200	v=400	v=600
d=50	1,65	6,18	12,89
20	0,68	2,55	5,32
7	0,26	0,99	2,07

Сумма положительныхъ разностей (между вычисленными и наблюденными сопротивленіями) равна 0,40, а сумма отрицательныхъ=0,73. Притомъ наибольшія разности получаются для доски въ 50′ длиною, какъ и можно было ждать, потому что длина этой доски только въ 5 разъ съ небольшимъ превосходитъ длину всего бассейна Фроуда. Если примѣнить второе выраженіе для $f(v)$, то есть считать, что сопротивленіе растетъ пропорціонально биному $v^2 + Dv$, то получится для сопротивленія гладкихъ досокъ выраженіе:

$$r = (v^2 + 53\, v) \, \frac{0{,}75 + 0{,}645\, d}{1000000} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII}$$

Вычисляемыя по этой формулѣ сопротивленія суть:

	v=200	v=400	v=600
d=50	1,67	5,98	12,94
d=20	0,69	2,48	5,35
d= 7	0,27	0,95	2,06
d= 2	0,09	0,37	0,79

Сумма положительныхъ разностей для $d=50$, 20 и 7 равна здѣсь 0,46, а отрицательныхъ 0,59. И опять наибольшая отрицательная разность получилась для $d=50'$ при $v=600'$, какъ и можно было ожидать.

Отсюда очевидно, что изъ опытовъ Фроуда, съ довольно большою вѣроятностію можно вывести заключеніе, что *треніе на*

гладкихъ плоскостяхъ, параллельныхъ съ направленіемъ пути, постоянно и съ длиною неизмѣнно, а именно на 1 кв. футъ оно равно

$$f = \frac{d\,(r)}{d\,(d)}.$$

Если принять первую изъ нашихъ формулъ и выразить скорости футами въ секунду (а не въ минуту, какъ было до сихъ поръ), то треніе на S кв. футовъ:

$$f = Sv^2\ (1 - 0{,}0192v)\ 0{,}00312 \quad \text{IX}$$

Принявъ вторую формулу

$$f = S\ (v^2\ 1{,}13 + v)\ 0{,}00205 = S(v^2 + 0{,}883v)0{,}00232 \quad \text{X}$$

При поверхности S=50 для $v=5$ и $=10'$, первая даетъ $f=3{,}53$ и 12,60 фунтовъ, вторая $f=3{,}41$ и 12,61, вмѣсто тѣхъ 4,1 и 15,5 фунтовъ, которые инымъ способомъ мы вывели изъ опытовъ Бофуа (стр. 58). Для $v=10'$ въ секунду (=600′ въ минуту) Фроудъ даетъ при $d=50'$ треніе доски=12,48.

Считаю не излишнимъ замѣтить, что выраженіе X, вообще говоря, не только лучше передаетъ данныя Фроуда, но, что гораздо важнѣе (ибо подлинныхъ опытныхъ чиселъ Фроуда мы не знаемъ), болѣе чѣмъ формула IX отвѣчаетъ природѣ явленія по тремъ причинамъ: 1) Кулонъ, а за нимъ Стоксъ, Майеръ и др. (какъ увидимъ далѣе) считаютъ, что при малыхъ скоростяхъ (гораздо меньшихъ, чѣмъ у Фроуда) треніе пропорціонально первой степени скорости, а это и видно въ нашей формулѣ X, потому что значеніе члена v^2 будетъ уже меньше, чѣмъ значеніе члена съ v, если скорости будутъ представлять правильныя дроби, то есть будутъ доли фута въ секунду; 2) формула IX даетъ возможность думать противное, требуетъ, чтобы при малыхъ скоростяхъ треніе было пропорціонально v^2, чего ждать никоимъ образомъ нельзя; 3) сверхъ того эта формула даетъ поводъ думать, что при возростаніи скорости треніе уменьшается и даже при нѣкоторой скорости уничтожится. Правда, что наши формулы не имѣютъ претензіи выразить природный законъ тренія, онѣ не больше, какъ интерполяціонныя формулы, но физическое значеніе формулъ необходимо имѣть въ виду, даже тогда, когда онѣ примѣняются въ предѣлахъ опыта (то есть—не служатъ для эксполированія), потому что иначе выводъ формулы будетъ однимъ алгебраическимъ упражненіемъ, не долженствующимъ имѣть мѣсто при разборѣ явленій природы. Поэтому формулы VIII и X я считаю за болѣе приличныя дѣлу, чѣмъ формулы VII и IX. Главная цѣль, съ которою, не смотря на недостатокъ подлинныхъ чиселъ, я старался обработать данныя Фроуда, состоитъ въ томъ, чтобы провѣрить при помощи данныхъ выводъ Фроуда объ измѣненіи тренія съ длиною доски. Наши формулы показываютъ, что треніе можно, даже по даннымъ самаго Фроуда, считать независящимъ отъ длины доски.

Результатъ Фроуда (треніе перемѣнно съ длиною доски) зависитъ поэтому отъ того, что онъ не отличилъ сопротивленія носа и кормы, наклонныхъ къ направленію пути. отъ тренія или сопротивленія площадей параллельныхъ пути. У носовой и кормовой частей доски бока или стороны наклонены къ направленію движенія, а потому (какъ бы тамъ ни объяснять сопротивленіе) представляютъ иную мѣру сопротивленія при данной поверхности, чѣмъ тѣ бока доски, которые параллельны съ направленіемъ пути, и при данной длинѣ носа и кормы, ихъ сопротивленіе очевидно должно быть больше, чѣмъ остальныхъ частей такой же длины [1]). Взявъ всю длину — носа, кормы и самой доски — и дѣля полученное сопротивленіе на всю эту длину, Фроудъ долженъ былъ достичь того результата, который получилъ (сопротивленіе уменьшается съ длиною), потому что сопротивленіе первыхъ футовъ длины больше, чѣмъ слѣдующихъ, а затѣмъ треніе постоянно и пропорціонально поверхности [2]).

Переходя отъ гладкихъ досокъ къ покрытымъ пескомъ, Фроудъ поступилъ опять чрезвычайно непослѣдовательно, приписавъ все получающееся сопротивленіе одному тренію, не вычтя сопротивленія носа и кормы, не принявъ во вниманіе увеличенія сѣченія доски и, главное, не обративъ вниманія на то, что неровности песчаной поверхности представляютъ совершенно иной родъ сопротивленія, чѣмъ сплошная поверхность. Если бы называть треніемъ все сопротивленіе (за вычетомъ носоваго и кормоваго), полученное въ этихъ случаяхъ, то для гладкой поверхности должно бы назвать сопротивленіе внутреннимъ треніемъ (развивающимся въ жидкостяхъ, разные слои которыхъ имѣютъ неодинаковую скорость), а сопротивленіе шероховатыхъ поверхностей — суммою внутренняго и внѣшняго тренія, какъ это общепринято при разсмотрѣніи вопросовъ о движеніи жидкостей, напр. теченія ихъ по трубкамъ. Смѣшивать же внутреннее треніе съ внѣшнимъ нельзя даже для рѣшенія практическихъ вопросовъ, не только что для установки величинъ, выражающихъ мѣру тренія. Внутреннее

---

[1]) Какъ это выходитъ по формулѣ, которая даетъ при $v=600$ (или 10′ въ секунду) для $d=1$, $r=0{,}55$, при $d=2$; $r=0{,}89$, а затѣмъ на каждый футъ прибавляется 0,25 фунта сопротивленія.

[2]) На стр. 61, въ примѣчаніи, мы вывели изъ данныхъ Фроуда, что при $v=600'$ въ минуту, треніе на 1 кв. футъ на разстояніи отъ носа$=d$, равно $0{,}223+\frac{0{,}647}{1+2d}$. Очевидно, что при очень большой длинѣ доски треніе на 1 кв. футъ приближается къ 0,223. По X-ой формулѣ, которая приведена нами выше и выведена изъ чиселъ Фроуда, независимо отъ его разсчетовъ, оказывается, что при $v=600'$ треніе на каждый кв. футъ доски$=0{.}251$ фунта. Разность этихъ чиселъ (0,223 и 0,251) зависитъ по всей вѣроятности отъ того, что для доски длиною въ 50′ сопротивленіе получено въ опытѣ меньше, чѣмъ было въ дѣйствительности (отъ неустановившагося движенія) и число относящееся сюда уменьшило предѣлъ, къ которому стремится треніе, на 1 кв. футъ. Еслибы стали извѣстны подлинныя числа опытовъ Фроуда, можно было бы все это рѣшить съ довольно большою увѣренностію.

треніе зависитъ только отъ качества жидкости, а внѣшнее отъ формы поверхности твердаго тѣла, около котораго происходитъ треніе. Считая сопротивленіе поверхности, покрытой пескомъ, за такое же, но измѣненное въ величинѣ треніе, какое представляетъ и гладкая поверхность, Фроудъ долженъ былъ бы считать за одно треніе и тотъ случай, когда бы на плоскостяхъ его досокъ помѣщены были шары, конусы и всякія другія тѣла, какой угодно формы и размѣровъ. Въ этомъ случаѣ, всякій понимаетъ, что сопротивленіе возрастетъ, и всякій скажетъ, что возрастетъ отъ той же самой причины, отъ которой растетъ сопротивленіе при увеличеніи встрѣчной поверхности и угла встрѣчи. Рядъ шаровъ, слѣдующихъ за передовымъ шаромъ, представитъ сопротивленіе пропорціональное числу шаровъ и гораздо большее, чѣмъ сопротивленіе параллельной съ направленіемъ движенія поверхности, размѣрами по длинѣ цѣпи шаровъ. У Памбура, въ его Traité théorique et pratique des machines locomotives (2 edit. 1870 p. 134), и у Тибо, въ его Experiences sur la résistance de l'air [1]), есть опыты, относящіеся до сопротивленія одинаковыхъ тѣлъ, слѣдующихъ другъ за другомъ на извѣстномъ близкомъ разстояніи и расположенныхъ по направленію движенія. Оказывается, что каждое новое тѣло прибавляетъ мѣру сопротивленія. И это не есть треніе. Еще можно было бы думать такъ о вагонахъ, съ которыми дѣлалъ опыты Памбуръ, еще можно было бы, хотя съ великою натяжкою, сказать, что прибавка вагоновъ потому прибавляетъ сопротивленіе воздуха, что длинные бока вагоновъ увеличиваютъ треніе [2]), но въ опытахъ Тибо, сдѣланныхъ для опредѣленія вліянія парусовъ, загораживающихъ другъ друга, ничего подобнаго нельзя и подумать, потому что онъ бралъ картонныя или полотняныя площадки и располагалъ ихъ не вдоль, а поперекъ направленія движенія, а потому о треніи боковыхъ площадей нельзя и говорить, потому что онѣ чрезвычайно малы. Извѣстно также изъ практики водопроводовъ, что когда поверхность трубъ чиста, онѣ даютъ гораздо больше воды, чѣмъ послѣ того, какъ на ихъ стѣнки осядетъ песокъ, ржавчина и т. п. Самъ Фроудъ (Report Brit. Association 1869) въ Torquay изслѣдовалъ въ этомъ отношеніи водопроводъ и показалъ, что трубы діаметромъ въ 10″ при наростѣ въ $\frac{1}{8}$″ давали 317 галлоновъ воды, а когда прочистили (убѣдившись, что препятствіе вездѣ одинаково, не зависитъ отъ случайности засоренія), тѣже трубы дали 655 галлоновъ. Въ тоже время извѣстно, что трубы чистыя и гладкія изъ всякаго матеріала даютъ одно количество

[1]) Опыты этого послѣдняго будутъ подробно разбираться въ слѣдующей главѣ.

[2]) Памбуръ дѣлалъ опыты такъ. Вагоны скатывались по рельсамъ, по наклонной мѣстности, пріобрѣтали скорость и ею поднимались по наклону. Отдѣльные вагоны поднялись на подъемъ длиною отъ 3768 до 2064 футовъ, а поѣздъ изъ 5-ти вагоновъ пробѣжалъ 5776 футовъ. Отсюда, зная вѣсъ и треніе, если сопротивленіе 1-го вагона=70 (передняя площадь около этого числа кв. футовъ), то сопротивленіе слѣдующихъ вагоновъ=10, т. е.=$\frac{1}{7}$ всего прямаго сопротивленія.

воды, то есть представляютъ одинаковое треніе, независящее отъ матеріала. Песчинки на доскахъ Фроуда тѣже вагоны Памбура, тѣже прикрывающіе другъ друга паруса Тибо, тотъ же наростъ водопроводныхъ трубъ. Сопротивленіе второй, третьей и т. д. неравно сопротивленію первой песчинки, для каждой пусть=$\frac{1}{n}$ доли сопротивленія единичной песчинки, а если такъ, то n другъ за другомъ расположенныхъ песчинокъ дадутъ сопротивленіе, равное одной отдѣльно и прямо стоящей песчинкѣ, а mn песчинокъ, слѣдующихъ другъ за другомъ, дадутъ сопротивленіе въ m разъ большее, чѣмъ одна песчинка, и если длина будетъ рости, m будетъ тоже рости, а слѣдовательно и сопротивленіе станетъ возрастать, такъ какъ растетъ прямое сопротивленіе m песчинокъ. Смыслъ этого толкованія опытовъ Фроуда съ песчаными поверхностями заставляетъ ждать для этихъ поверхностей даже иного закона измѣненія сопротивленія со скоростію, чѣмъ для случая гладкихъ поверхностей. Такъ и вышло въ опытахъ Фроуда, потому что (приложеніе 7-е) для песчаныхъ поверхностей вышло сопротивленіе пропорціональнымъ квадрату скорости v^2, а для гладкихъ поверхностей оно пропорціон. $v^{1{,}83}$ (очень близкое вывелъ для тренія и Бофуа, стр. 50). Фроудъ считаетъ такое различіе *аномаліей* (прил. 7-е), а оно совершенно законно и ожидаемо. Вся аномалія въ томъ одномъ, что Фроудъ, слѣдуя фрикціонной системѣ понятій о сопротивленіи, считаетъ все сопротивленіе остроносыхъ тѣлъ—лишь однимъ треніемъ. Чтобы это утвердить, Фроуду слѣдовало бы сдѣлать опредѣленія съ досками одной длины, но разной толщины, снабженными носомъ и кормою однихъ угловъ, и показать, что при этомъ получаются однѣ и тѣже величины сопротивленія. Тогда бы можно было принять выводы Фроуда. А до тѣхъ поръ надо думать, на основаніи всего понынѣ извѣстнаго, что сопротивленія при этомъ вышли бы различными и если сѣченія обѣихъ досокъ суть m и M, а боковыя поверхности S, то сопротивленія были бы: одно $r=kmv^n+fSv^{n'}$, а другое $R=kMv+fSv$, а неравныя между собою и равныя $FSv^{n''}$. У Фроуда же взяты были, сколько можно было судить по его описаніямъ, всѣ доски одной и той же толщины. При томъ объ этой толщинѣ прямо указано, что (прилож. 6) она=$\frac{3}{16}$ дюйма или почти 4,1 миллиметра. О толщинѣ досокъ Фроуда можно судить еще по черт. 104, около котораго въ подлинникѣ стоятъ слова „full size“, изъ чего имѣемъ право заключить, что толщина досокъ была въ дѣйствительности близка къ 5 миллиметрамъ или 0,2 дюйма. Судя по тому, что высота досокъ была = 19 дюймамъ (прил. 6-е), оказывается, что окружность поперечнаго сѣченія досокъ была=$2.19+2.\frac{3}{16}=38'',37$, а потому мнѣ кажется непонятнымъ, почему Фроудъ считаетъ эту окружность=$3'2''$, какъ значится при его діаграммахъ, Plate IV и V (черт. 105 и 106). Не изъ за этого, можно сказать, мелочнаго упущенія, заговорилъ я здѣсь о размѣрахъ досокъ Фроуда, а для того, чтобы читатель вообразилъ затѣмъ такую тоненькую доску длиною въ 50 футовъ, висящую въ водѣ, закрѣпленную

лишь въ передней части и движущуюся со скоростію 800 футъ въ минуту или около 13 футъ въ секунду, т. е. около 4 метр. (около 8 узловъ или 14 верстъ въ часъ). Каково было тогда положеніе доски? Оставалась ли ея ось параллельною поверхности воды и не получала ли вся доска колебательнаго, змѣеобразнаго движенія? Сохраняла ли вообще доска въ водѣ свою прямизну, то есть не коробилась ли въ продолженіи опыта, не отвисалъ ли кромѣ того ея задній свободный конецъ? На эти вопросы нѣтъ положительныхъ отвѣтовъ въ отчетахъ Фроуда. У него однако есть указаніе на то, что нижнее ребро доски было свинцовое, ради того чтобы доски не всплывали и имѣли плотность воды. Но при этомъ, очевидно, рождается новый вопросъ — какъ этотъ свинцовый киль или балластъ прикрѣплялся къ доскѣ? Мѣста прикрѣпленія свинца къ доскѣ были ли за подлицо съ доскою? Отсутствіе подробностей въ отчетахъ Фроуда дѣлаетъ невозможнымъ судить о величинѣ этихъ и другихъ побочныхъ вышеисчисленныхъ сопротивленій. Можно только, и то грубо, разсчесть сопротивленіе, соотвѣтствующее носу и кормѣ, вмѣстѣ съ поперечнымъ сѣченіемъ досокъ Фроуда. Ширина ихъ$=\frac{3}{16}''=0{,}0156'$, высота $19''=1{,}5833'$, слѣдовательно поперечное сѣченіе$=0{,}0247$ кв. фута. Если бы тонкая пластинка этой площади двигалась со скоростію v футъ въ секунду, то, принявъ коэффиціентъ k_1 1,30 (стр. 19), выведенный Понселе, ея сопротивленіе$=Sv^2 1{,}26$ фун.$=0{,}0311v^2$ фунта (напр. при $v=10'$ въ секунду$=600'$ въ минуту, $r=3{,}11$ фунта). При этомъ окружность доски$=3'2''$, а если бы она была$=1$ футу, какъ во всѣхъ предъидущихъ разсчетахъ, то сѣченіе доски было бы$\frac{0{,}0247}{3{,}17}=0{,}0078$ кв. ф. и сопротивленіе соотвѣтственной тонкой пластинки было бы близко къ $0{,}01v^2$, если скорости даны футами въ секунду. Если формулу VII перевести для скоростей въ секунду, то она получаетъ видъ:

$$r=v^2(1-0{,}0192v)(0{,}0036+0{,}00312d)\ ^1).$$

Для малыхъ скоростей (до 6 футъ) можно принять приближенно $r=(0{,}0034+0{,}0028d)v^2$, а отсюда оказывается, что при длинѣ $d=2{,}3$ фута, сопротивленіе [2]) столь остроноcаго тѣла, какъ доски Фроуда (черт. 104, CC), равняется сопротивленію $(=0{,}01v^2)$ нормальной пластинки, равной поперечному сѣченію доски. А от-

[1]) Напомнимъ здѣсь, что множитель $v^2(1-av)$ или (r^2+av) можетъ быть замѣненъ множителемъ v^n, гдѣ n меньше двухъ. Такъ поступали Бофуа и Фроудъ. Я ввелъ множитель $v^2(1-av)$ или v^2+av преимущественно для удобства разсчета.

[2]) Изъ данныхъ стр. 65, видно, что при длинѣ отъ 2,5 до 2 футъ при скорости $0'$ въ секунду ($600'$ въ минуту) сопротивленіе близко къ 0,9 фунта для досокъ Фроуда при окружности$=1$ футу. При той же скорости Бофуа даетъ для тѣлъ, ограниченныхъ спереди нормальной плоскостью, сопротивленіе близкое къ 90 фунт. на 1 кв. футъ, а какъ здѣсь сѣченіе$=0{,}0078$, то сопротивленіе плоскости сѣченія$=0{,}70$ фунта, т. е. такое же какъ для доски въ $2'$ длиною. Замѣтимъ, однако, что числа Бофуа ниже дѣйствительности.

сюда ясно слѣдуетъ, что между весьма длинными тѣлами не должно ждать тѣлъ наименьшаго сопротивленія.

Итакъ, если для гладкихъ досокъ выразить треніе, независимо отъ формы носа и кормы, и считать его фунтами на одинъ кв. футъ площади параллельной направленію пути, то треніе

$$\frac{d(r)}{d(d)} = f = v^2\ (1-0{,}019v)\ 0{,}0031, \text{ или} = (1{,}13v^2+v)\ 0{,}00205.$$

Выражая же треніе въ килограммахъ на 1 кв. метръ поверхности параллельной пути и считая скорости v метрами въ секунду, получаемъ соотвѣтственно формулѣ IX выраженіе:

$$f = v^2\ (1-0{,}062v)\ 0{,}163 \text{ килогр. на кв. метръ.}$$

А соотвѣтственно X выраженіе:

$$f = (v^2+0{,}27v)\ 0{,}122 \text{ килогр. на кв. метръ} \quad . \quad . \quad \text{XI.}$$

Въ предѣлѣ отъ $v=1$ до $v=3$ метрамъ, можно также считать треніе приближенно $f=S\ 0{,}14v^2$ килогр.

Эта величина тренія отличается отъ той, которую даютъ опыты Бофуа, но различіе невелико (стр. 58), а принимая въ разсчетъ методы наблюденій, даже сходство результатовъ замѣчательно, и служитъ къ укрѣпленію выводовъ, а потому для дальнѣйшаго разсчета мы удержимъ впослѣдствіи нашу послѣднюю формулу (XI), отвѣчающую опытамъ Фроуда. Она выражаетъ, это должно не забывать, треніе *на плоскости, параллельныя* съ направленіемъ движенія. Какова величина тренія при разномъ другомъ уклонѣ плоскостей—это мы, строго говоря, не знаемъ изъ имѣющихся опытовъ о боковомъ или параллельномъ треніи. Великій успѣхъ въ ученіи о сопротивленіи составлялъ уже одно введеніе понятія о существованіи бокового тренія въ строго опредѣляемой мѣрѣ. Его нельзя было видѣть, смотря на сопротивленіе въ смыслѣ ньютоновомъ, какъ на результатъ инерціи или удара, потому что на плоскостяхъ, параллельныхъ движенію, нѣтъ ударовъ, инерція жидкости не имѣетъ значенія. Хотя Ньютонъ, Эйлеръ, и масса другихъ, прежнихъ изслѣдователей, допускали существованіе тренія, но въ разсчетъ его не принимали, а оно оказалось значительнымъ даже у параллельныхъ плоскостей и его *должно считать* существующимъ и для всякихъ другихъ площадей, ограничивающихъ движущееся тѣло. Бофуа (1796) и Кулонъ (1803) первые ясно ставятъ вопросъ, дѣлаютъ прямые опыты. Опытъ явно сталъ тогда во главѣ знанія, относящагося до сопротивленія. А затѣмъ Юнгъ (1807) [1]), Нордмаркъ (1808), Тредгольтъ (1828), а въ позднѣйшее время Скотъ-Россель, Буржуа и многіе другіе вводятъ треніе, какъ элементъ всегда и явно вліяющій на величину сопротивленія, признаютъ мѣру сопротивленія за сумму изъ прямаго сопро-

[1]) Thom. *Joung.* Curse of Lectures on natural philosophy. T. II. Gehler's Physikal Wörterburh 1812. X. 1816.

тивленія + треніе. Если Дюшеменъ и Понселе въ 40-хъ годахъ еще не принимаютъ въ разсчетъ тренія, то конечно лишь потому, что они опытовъ Бофуа не разбирали, а держались больше за Дю-Буа и за обычныя теоретическія представленія о сопротивленіи. Но рождается вопросъ очевидный: каково же треніе наклонной плоскости и сложной формы тѣла, такой какъ корабль, то есть какъ велика его роль въ мѣрѣ сопротивленія разныхъ формъ? Ради краткости, я избѣгаю изложенія всѣхъ вышеисчисленныхъ и друг. системъ, которыми пытались помирить Ньютонову систему инерціоннаго сопротивленія съ укрѣплявшимся ученіемъ о боковомъ треніи. Такъ поступаю я по тому прежде всего, что на русскомъ языкѣ имѣется изложеніе этихъ ученій въ книгѣ М. М. Окунева: «Теорія и практика кораблестроенія», часть I (1865), и въ статьяхъ С. А. Бурачка, помѣщенныхъ въ «Морскомъ Сборникѣ» за 1872 № 6, 7, 8, 9. Теорія или, правильнѣе, пріемъ разсчета сопротивленія, предложенный самимъ Бурачкомъ, изложенный въ томъ же журналѣ 1872 г. № 11 и раньше того упомянутый въ «Морскомъ Сборникѣ» 1841 г., Т. I, стр. 174, 394 и 522, въ 1860 году апрѣль и май и въ 1861 № 6 и 7, отвѣчаетъ такой же срединѣ—между прежнею, такъ сказать, *инерціонною* системою и новѣйшими системами, которыя можно назвать *фрикціонными* системами сопротивленія, исходящими въ ученіи о сопротивленіи изъ понятія о треніи, какъ главномъ источникѣ траты силы при движеніи корабля въ жидкой средѣ. Выше я изложилъ исходные опыты фрикціонныхъ системъ; въ приложеніи 8-мъ (и въ «Морскомъ Сборникѣ» за 1877 г. № 4) приведены воззрѣнія Фроуда, послѣдователя волновой теоріи, составляющей первую ступень развитія фрикціонныхъ системъ. Въ «Морскомъ Сборникѣ» г. Страннолюбскій изложилъ принципы волновой теоріи по Ранкину. Тотъ же предметъ переданъ въ упомянутыхъ выше статьяхъ Окунева и Бурачка. Недавно И. П. Алымовъ въ «Морскомъ Сборникѣ» въ послѣд. книгахъ 1879 года изложилъ свои мысли и проекты, во многомъ касающіеся той же системы. Все это освобождаетъ меня отъ обязанности передавать здѣсь подробности не только переходныхъ системъ, но и той первой и, такъ сказать, крайней формы фрикціонной теоріи, которая выразилась лучше всего у Ранкина. Не излагаю я подробностей этихъ системъ еще и потому, что онѣ, напримѣръ теорія Ранкина или «новая» теорія Бурачка, малодоказательны, и хотя мѣстами по своимъ пріемамъ и соображеніямъ очень изящны, но, конечно, невѣрны и не общи уже по одному тому, что неприложимы къ такимъ простѣйшимъ формамъ, какъ шаровая, призматическая или цилиндрическая, а если прилажены съ разными натяжками къ разсчету силы машины обычныхъ формъ кораблей, то или при помощи коэффиціентовъ, найденныхъ изъ опыта, или при допущеніяхъ, подобныхъ увеличенной подводной поверхности, какъ у Ранкина или какъ у Бурачка, при допущеніи въ разсчетъ предположеній, на опытъ не опирающихся, о направленіи скольженія ча-

стицъ воды по бокамъ судна, и такихъ неясныхъ и произвольныхъ выкладокъ («Морск. Сборн.», 1872 г., № 11, стр. 35—41), которыя не въ обычаѣ въ строго-научныхъ изслѣдованіяхъ. У каждаго крупнаго изслѣдователя послѣдняго времени, а тѣмъ болѣе у Ранкина и Бурачка, есть частности и есть нѣкоторыя общія соображенія, которыя представляютъ много оригинальнаго и поучительнаго, но нѣтъ ни полнаго рѣшенія задачъ сопротивленія, нѣтъ ни своихъ опытныхъ изслѣдованій, ни приложенія своихъ выводовъ къ простѣйшимъ и извѣстнымъ измѣреніямъ величины сопротивленія, а вся провѣрка сводится на приложимость системы къ опредѣленію сопротивленія кораблей. А оно есть искомое, должно служить концомъ или выводомъ теоріи, а не быть началомъ ученія о сопротивленіи, потому что тутъ дѣло такъ сложно, что нельзя и думать разобрать его раньше, чѣмъ простѣйшіе случаи. Ранкинъ прямо говоритъ, что въ случаѣ несовершенной формы, его ученіе неприложимо даже къ кораблю, а вовсе и не должно прилагаться къ такимъ тѣламъ, какъ шаръ, цилиндръ и т. п. Формулы же Бурачка, въ томъ видѣ, какъ онѣ имъ опубликованы въ вышеупомянутыхъ статьяхъ, едва ли могутъ быть приложены къ подобнымъ тѣламъ [1]). При этомъ становится очевиднымъ то поло-

---

[1]) Формула, данная Бурачкомъ, принимаетъ простѣйшій видъ въ томъ случаѣ, когда носъ и корма одинаковы, мидель посединѣ. Тогда она превращается въ слѣдующую (приводимъ здѣсь величину сопротивленія, т. е. силу, а не работу, какъ даетъ Бурачекъ):

$$R=\frac{\Delta M v^2}{2g}\sqrt{\alpha^2(1-\mathrm{Cos}\theta)^2(r s+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sini},^2+\beta^2\mathrm{Sin}^2\theta\,(r s+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sinc})^2+\text{треніе, гдѣ}}$$

Δ вѣсъ куб. мѣры жидкости, M площадь миделя, v скорость, g напряженіе тяжести; $\alpha=\frac{\pi'}{\pi};\beta=\frac{T'}{T}$; π' средняя мѣра (снятая по чертежу корабля, въ статьяхъ Бурачка даны всѣ указанія, необходимыя для подобныхъ съемокъ) паденія или опусканія водяныхъ частицъ, двигающихся *по слѣдамъ* перпендикулярнымъ къ шпангоутамъ, считая отъ точки носовой части корабля до миделя; T' средняя мѣра отступленія или движенія въ бокъ водяныхъ слѣдовъ, π и T паденіе и отступленіе главнаго слѣда, идущаго отъ той точки, которая лежитъ на водяной поверхности, θ уголъ миделеваго флортимберса (въ миделѣ близъ киля) съ діаметральною плоскостью; r отношеніе ширины къ длинѣ корабля; s отношеніе высоты или глубины подводной части корабля къ его широтѣ въ миделѣ; i средній уголъ (снимается съ вертикальнаго чертежа корабля послѣ обозначенія слѣдовъ) вертикальнаго уклона слѣдовъ, и c средній же уголъ горизонтальнаго уклона слѣдовъ (снимается съ горизонт-проэкціи корабля).

Очевидно, что и рѣчи не можетъ быть объ уклонѣ внизъ, или о паденіи слѣдовъ (перпендикулярныхъ къ шпангоутамъ или поперечнымъ сѣченіямъ) для тѣлъ призматическихъ, подобныхъ тѣламъ, испытаннымъ Бофуа (Листъ 6 и 7), потому что всѣ слѣды должны лежать, по смыслу правилъ, данныхъ Бурачкомъ для ихъ вычерчиванія, въ этомъ случаѣ въ горизонтальныхъ плоскостяхъ. Поэтому π и π' равны нулю. А между тѣмъ въ статьѣ Н. Н. Огановича («Морской Сборникъ», 1861 г. № 6, стр. 326), трактующей вопросъ о формулѣ Бурачка, прямо даны значенія α (отношеніе средняго паденія къ главному) и углы паденія именно для тѣлъ Бофуа. Надо думать, какъ мнѣ и сообщалъ сынъ профессора, Е. С. Бурачекъ, что при вычисленіи сопротивленія

жительно-вредное вліяніе на успѣхи истиннаго знанія, которое оказываетъ преждевременное стремленіе охватить сразу теоріею прямые практическіе интересы. Сборъ, регулированіе и выводъ эмпирическихъ законовъ, касающихся такихъ природнымъ явленій,

---

тѣлъ, подобныхъ вышеуказаннымъ, примѣнялись другія, чѣмъ публикованныя С. А. Бурачкомъ формулы. Тѣже, которыя извѣстны, формулы этого автора не умѣли примѣнить ни къ шару, ни къ призмамъ, ни къ тѣламъ вращенія ни я, ни многія изъ лицъ, вникавшихъ въ ученіе нашего покойнаго спеціалиста. Сдѣлаемъ однако попытку.

Возьмемъ для примѣра симметрическое тѣло *Aa* (черт. 77, листъ 7): въ срединѣ кубъ, каждая сторона=1 футу, носъ и корма призмы (ось вертикальная), бока которыхъ=3 футамъ, слѣдов. уголъ встрѣчи=9° 35′ 38″, высота призмы=$\sqrt{3^2-(\frac{1}{2})^2}$=2,958, слѣд. вся длина тѣла = 2.2,958+1 = 6,916, ширина=1, высота=1, а потому $r=\frac{1}{6,916}$=0,169 ; s=1. Уголъ θ=90°; i=0; с получится изъ того, что по длинѣ 3′ уголъ встрѣчи=9° 35′ 38″, а по длинѣ ½ фута (по кубу до миделя) уголъ встрѣчи=0, а потому: средній уголъ будетъ по всей длинѣ до миделя=углу встрѣчи, дѣленн. на $3\frac{1}{2}$=8° 13′ 24″=c. Такъ какъ всѣ паденія и всѣ отступленія (по крайней мѣрѣ по бокамъ) одинаковы, то α и β, кажется, надо принять=1, но здѣсь дѣло не ясно, п. ч. для α получится выраженіе $\frac{0}{0}$ неопредѣленное, а что касается до угловъ отступленія, то по дну и вершинѣ тѣла *Aa* нѣтъ отступленій, но не знаемъ, судя по правиламъ Бурачка, принять ли это въ разсчетъ и какъ это сдѣлать. Придавъ эти значенія входящимъ величинамъ, и зная, что въ англійскихъ мѣрахъ Δ=62,5 ; M=1 ; g=32,2, для v=10, получимъ

$$R\text{—треніе}=\frac{62,5.(10)^2}{64,4}\sqrt{(0,169)^2+(0,169+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\ 8°13'24'')^2}=\frac{6250}{64,4}.0,294=$$

=28,5 фунтовъ. Бофуа даетъ для сопротивленія тѣла *Aa*, за вычетомъ тренія, при 10′ скорости, величину 20,37 фунтовъ. Если уменьшить, судя по соображеніямъ, высказаннымъ выше, величину угла c, а также значеніе средняго угла отступленія (тогда β будетъ меньше единицы), то величина R, конечно, меньше. Но въ томъ здѣсь и дѣло, что сомнѣнія въ приложеніяхъ будутъ встрѣчаться на каждомъ шагу, если принципы, на которыхъ основанъ весь выводъ правилъ, неясны по темнотѣ и необщности изложенія. Эта неясность, а затѣмъ приложимость къ опытамъ Бофуа, о которой говоритъ и г. Ограновичъ, заставляли и меня, какъ и многихъ другихъ, предполагать въ теоріи Бурачка нѣчто совершенно новое и успѣшное. Долго я, признаюсь, старался объяснить себѣ многія частности теоріи Бурачка, долго предполагалъ, что онъ попалъ на истинный путь. Но мало по малу, разбирая разныя стороны дѣла, я пришелъ къ тому заключенію, что теорія С. А. Бурачка лишена основательности.

Первое сомнѣніе возбудило во мнѣ слѣдующее обстоятельство. Самъ Бурачекъ и г. Ограновичъ доказываютъ справедливость новой формулы сопротивленія приложимостію ея къ объясненію чиселъ, полученныхъ для разныхъ тѣлъ въ опредѣленіяхъ Бофуа. Допустимъ это на слово. Оказывается затѣмъ, что данныя Бофуа не согласны съ выводами другихъ наблюденій, какъ будетъ показано въ слѣдующей главѣ. Такъ, напримѣръ, для шара, сѣченіе котораго равно 1 кв. метру, Бофуа даетъ сопротивленіе около 19 кило, при скорости= 1 метру, а всѣ другія изслѣдованія показываютъ, что тогда сопротивленіе близко къ 30 кило. Слѣдовательно, согласіе формулъ Бурачка съ числами Бофуа есть несогласіе съ природою, доказываетъ невѣрность формулъ Бурачка.

Это зародило сомнѣніе. Затѣмъ ему нашлись подтвержденія.

Главными доказательствами сомнительности выводовъ С. А. Бурачка служили для меня слѣдующія три: 1) Въ «Морск. Сборникѣ» 1860 № 5 С. А. Бурачекъ прилагаетъ свою формулу для разсчета сопротивленія фрегата «Генералъ-Адмиралъ» и находитъ по чертежу, что безъ тренія для приданія ско-

имѣющихъ большое практическое значеніе, какъ напр. теченіе рѣкъ, полетъ птицъ, паденіе дождя и т. п., неизбѣжно необходимы раньше появленія теоріи этихъ явленій и могутъ, строго говоря, вести только къ составленію гипотезъ, болѣе или менѣе

рости 10 и 12 узловъ нужно 809 и 1398 лош. силъ, съ треніемъ же около 860 и 1480 л. силъ для преодолѣнія сопротивленія. Индикаторную силу паровой машины въ дѣйствительности Бураченъ указываетъ (стр. 96) равною 1018 и соотвѣтственную среднюю скорость 10 узловъ. Затѣмъ онъ пишетъ далѣе (стр. 97):» Слѣдовательно формулы и на этотъ разъ въ совершенномъ согласіи съ дѣйствительностію».. А я утверждаю, что приведенный примѣръ (если показаніе индинаторной силы дано вѣрно, а къ этой цифрѣ очевидно отнесено слово «дѣйствительность») прямо доказываетъ полную непримѣнимость формулы Бурачка къ дѣйствительности, потому-что трата силы машины двоякая: около половины на потерю въ работѣ пароходнаго винта, трепія механизма и т. п. и около половины, но никакъ не болѣе $\frac{2}{3}$ на борьбу съ сопротивленіемъ и треніемъ корабля о воду (что одно и разсчитывалъ Бурачекъ), а потому, не принимая въ разсчетъ первой траты, получающееся согласіе чиселъ указываетъ грубую невѣрность формулы Бурачка для разсчета сопротивленія. 2) Съ 1847 г. (Мор. Сб. 1848 Томъ 1-ый и 1872 № 11, стр. 46). С. А. Бурачекъ излагалъ морякамъ устно свое ученіе, въ 1872 изложилъ его печатно, а и понынѣ ни изъ статьи, ни изъ бесѣдъ со многими учениками Бурачка, ни мнѣ, ни кому либо изъ моихъ знакомыхъ не удалось уловить истинныя основан я всего ученія Бурачка. Красивы и ясны лишь самыя общія и бездоказательныя предположенія о движеніи слѣдовъ воды по бокамъ корабля, понятны затѣмъ, неизвѣстно какъ выведенныя, практическія правила вычисленія сопротивленія по указаннымъ формуламъ; все прочее, что необходимо для убѣдительности, не приведено, а потому въ результатѣ формулы С. А. Бурачка имѣютъ характеръ приспособленія къ малоточнымъ опытамъ Бофуа и къ практикѣ кораблестроенія, а не того приверженнаго къ чистой истинѣ искательства, которое всегда найдетъ возможность въ словѣ и статьѣ выразиться съ должною полнотою, особенно послѣ многихъ лѣтъ выработки. 3) С. А. Бурачекъ въ № 11 «Морск. Сборникъ» 1872 г. весьма изящно развиваетъ ту мысль, что при движеніи корабля раздвигаемыя носомъ частицы воды давить на сосѣднія, тѣ на слѣдующія и такъ далѣе до пространства, остающагося отъ убѣгающей кормы; тутъ и кончается передача давленій. Она совершается, по мнѣнію автора, основанному на представленіи о шарахъ водяныхъ частицъ, какъ бы по круговымъ сифонамъ, идущимъ съ носа къ кормѣ и имѣющимъ центры на поверхности миделя. Отсюда слѣдствіе, кажется согласное съ природою дѣла, что мидель долженъ быть по срединѣ длины, если желаютъ имѣть малое сопротивленіе. Отсюда же, на стр. 28 й выводится, какъ слѣдствіе: «наименьшій предѣлъ ширины канала, безвредный для сопротивленія (извѣстно, что въ узкихъ каналахъ сопротивленіе больше, чѣмъ въ открытой и глубокой водѣ)» опредѣлится радіусомъ отъ центра до начала крайняго носоваго сифона». «Назовемъ b полуширину, l полудлину корабля, найдемъ полуширину канала, безвредную для сопротивленія$=b+\sqrt{b^2+l^2}$". Этотъ выводъ изъ основныхъ положеній не только простъ и ясенъ, но и легко допускаетъ опытную провѣрку. Для изученія сопротивленій М. Л. Гросманъ и я произвели съ шарами разныхъ плотностей и діаметровъ, въ разныхъ жидкостяхъ и въ сосудахъ разнаго діаметра рядъ опредѣленій временъ паденія. Опыты эти въ свое время будутъ подробно описаны. Теперь же я приведу лишь тотъ несомнѣнный результатъ, въ которомъ каждый легко можетъ вновь убѣдиться, что времени паденія шаровъ явно (или легко замѣтно) больше, чѣмъ въ широкомъ сосудѣ уже тогда, когда діаметръ сосуда въ три, даже въ 5 разъ превосходитъ діаметръ шара. Слѣдовательно, выражаясь языкомъ С. А. Бурачка, вредъ для сопротивленія ощутителенъ даже при полуширинѣ канала, превосходящей четверной радіусъ шара, а по гипотезамъ и формулѣ С. А. Бурачка наибольшій предѣлъ вредной полушироты канала для движенія шара, коего радіусъ$=r$, долженъ

достойныхъ опытной провѣрки. Истинный путь, ведущій длиннымъ, но зато вѣрнымъ способомъ къ теоретическому пониманію сложныхъ явленій, состоитъ въ опытѣ и измѣреніи отдѣльныхъ частностей сложнаго явленія. Въ опытѣ устраняются побочныя, усложняющія обстоятельства, а измѣренія, производимыя при опытахъ. составляютъ главную возможность провѣрки и гипотезъ и потомъ теорій. Когда дѣло идетъ о явленіяхъ природы или касается такихъ областей чистаго знанія, которыя интересуютъ только немногихъ, избранныхъ приверженцевъ неприкладнаго, абстрактнаго знанія, тогда сочиненіе теоріи, даже для мало изученной области явленій, не только не приноситъ вреда, даже желательно и полезно, потому что образуетъ партіи, другъ передъ другомъ стремящіяся оправдать или опровергнуть черезчуръ рано явившееся обобщеніе. Такихъ примѣровъ много во всѣхъ областяхъ точныхъ знаній. Но когда дѣло касается не просто и прямо одного чистаго и свободнаго знанія, а живой и значительной практической дѣятельности (каково, напримѣръ, морское и кораблестроительное дѣло), находящейся въ рукахъ людей, долженствующихъ обладать практическимъ и теоретическимъ запасомъ знаній, тогда преждевременное составленіе теорій часто приноситъ вредъ и отъ него должны воздерживаться тѣ, кто понимаетъ современныя условія. Это потому, что готовую теорію легко и охотно принимаютъ въ практикѣ (если рутина не царствуетъ), примѣняютъ къ дѣлу и достигаютъ только плачевныхъ и напрасныхъ тратъ, да убѣж-

---

быть $=r+\sqrt{r^2+r^2}=2{,}41\ r$. Такъ какъ при полуширотѣ въ 3 r или даже въ 4 r замедленіе или «вредъ» сопротивленію еще ясно ощутителенъ, то гипотеза С. А. Бурачка о движеніи воды по кругообразнымъ сифонамъ невѣрна. А эта гипотеза положена въ основаніе всей теоріи автора, а потому становится очевиднымъ, что одинъ, весьма легко производимый, опытъ давно бы могъ убѣдить С. А. Бурачка въ невѣрности его гипотезъ (и онъ ихъ постарался бы замѣнить болѣе подходящими), если бы у него было стремленіе достичь истины тѣми путями, которыми она дѣйствительно достигается. Убѣжденіе въ существованіи возмущенія, производимаго движущимся шаромъ въ жидкости на разстояніи, въ 3—4 и болѣе разъ превышающемъ радіусъ шара, можно получить, не только измѣряя времена паденія въ сосудахъ разнаго діаметра, но и въ одномъ большомъ сосудѣ, если помѣстить въ немъ легко подвижный предметъ (напр. для воды восковой шарикъ на тонкомъ волокнѣ). Онъ шевелится при проходѣ падающаго шара, если находится отъ него на разстояніи въ 3—4 и даже 5 разъ превышающемъ радіусъ падающаго шара, какъ показали М. Л. Гроссману и мнѣ прямыя наблюденія Должно замѣтить еще, что Дюшеменъ въ 40-хъ годахъ вывелъ изъ опытовъ, что только на разстояніи, въ 4 раза превышающемъ ширину движущагося тѣла, жидкость остается неподвижною и что въ каналѣ діаметромъ въ 4 раза противу движущагося тѣла жидкость при движеніи приходитъ въ возмущеніе.

На основаніи трехъ указанныхъ причинъ, я не передаю въ этой книгѣ ни изложенія общихъ соображеній автора, ни частностей критики «новой русской теоріи сопротивленія», принадлежащей С. А. Бурачку, но съ охотою услышу голоса лицъ, которыя хотѣли бы толково изложить защиту мнѣній почтеннаго автора «русской теоріи», симпатичной мнѣ, не по названію и не по пріемамъ развитія, а по искрамъ правдивости, блестящимъ въ ней среди общаго мрака современныхъ теоретическихъ сужденій о сопротивленіи жидкостей.

денія въ теоретическомъ безсиліи, въ необходимости порознь вести дѣла жизни и практики отъ дѣлъ мысли и знанія. Такова, по моему мнѣнію, будетъ судьба всякаго теоретическаго поползновенія въ дѣлѣ кораблестроенія и вообще сопротивленія среды, пока не бросятъ торную дорогу аристотелевскаго и схоластически-гордаго стремленія охватить умомъ и анализомъ невѣдомую область сложнаго явленія. Въ дѣлѣ изученія природы—набѣгъ никогда не удается, потому что природа, во-первыхъ, не врагъ, а во-вторыхъ, не дремлетъ. Она раскрываетъ и отдаетъ въ распоряженіе всѣ свои силы, словомъ какъ бы покоряется—только тогда, когда за ней долго ухаживаютъ, когда свои мысли и требованія сообразуютъ съ ея условіями, когда покоряются и ей самой, словомъ тогда, когда она стоитъ на равной ногѣ съ обладателемъ или искателемъ, и лишь тогда, когда союзъ произошелъ на этихъ условіяхъ, она становится доброй хозяйкой въ практическихъ дѣлахъ, нѣтъ—такъ будетъ только ихъ портить. Такъ развивались всѣ тѣ области знанія, которыя достигли наибольшей практической полезности: астрономическія, механическія, физическія, химическія. Оттого съ высоты общихъ теоретическихъ соображеній въ дѣлѣ сопротивленія должно спуститься до опыта и измѣреній, если желательно, чтобы было достигнуто совершенство въ гипотезахъ и теоріяхъ предмета, а затѣмъ и въ практическихъ результатахъ, а самые опыты и измѣренія имѣютъ свойство наводить на пониманіе сущности дѣла больше, чѣмъ рановременныя и гордыя попытки охватить сразу всю сущность предмета. Таковъ индуктивный способъ знанія. По этой причинѣ во всей второй главѣ я почти ограничиваюсь описаніемъ опытовъ и измѣреній, касающихся сопротивленія, и только скрѣпляю внѣшнимъ образомъ отдѣльныя числа и наблюденія нѣкоторыми соображеніями и разсчетами, такъ сказать, ради того, чтобы сухая ложка опытнаго знанія легче принималась читателемъ. Какъ ни шатки иногда опытныя свѣдѣнія, касающіяся сопротивленія, все же они стоятъ много тверже теоретическихъ и обобщающихъ знаній этого предмета. Для убѣжденія читателей въ послѣднемъ, я считаю полезнымъ въ 5-мъ приложеніи къ этой книгѣ привести переводъ доклада, сдѣланнаго по иниціативѣ правительства въ 1869 году Британской ассоціаціи для успѣха знаній особымъ комитетомъ, въ которомъ участвовали лучшіе англійскіе спеціалисты (между прочимъ Ранкинъ и Фроудъ) и касающагося современнаго для того времени состоянія знаній о сопротивленіи корабля. Съ тѣхъ поръ эти знанія не подвинулись. Пусть же читатель услышитъ отъ компетентнѣйшихъ лицъ изложеніе того безформеннаго и почти безполезнаго состоянія знаній, до котораго дошли въ дѣлѣ сопротивленія, отдаваясь сперва Ньютону, а потомъ ограничиваясь кораблемъ, служа то богу, то маммонѣ и почти пренебрегая тѣмъ индуктивнымъ путемъ, который привелъ другія области новаго знанія къ ихъ сравнительному совершенству, а затѣмъ и къ практической приложимости. Ради той же цѣли, то есть убѣжденія въ отсутствіи какой либо

строгости въ теоретическомъ знаніи сопротивленія, въ приложеніяхъ 1-мъ, 2-мъ и 3-мъ приведены прежнія системы, стремившіяся охватить задачи сопротивленія, а въ приложеніяхъ 8-мъ и слѣд.—новѣйшія попытки этого же рода. Сопоставляя ихъ и прибавляя сюда теорію Бурачка, получимъ громкій, но далеко нескладный концертъ, явно показывающій, что снуются люди проникнуть въ тайны сопротивленія, но такъ толкаютъ другъ друга, что мѣшаютъ и сами себѣ и спокойному, хотя и вѣрному, ходу индуктивнаго знанія. Въ этой путаницѣ нельзя пробираться безъ столкновенія; но пусть меня толкаютъ, я постараясь съ своей стороны, никого не задѣвая, идти полегоньку, руководствуясь свѣтомъ опытнаго пріема знаній, а потому и обращаюсь прежде всего за указаніемъ къ измѣреніямъ сопротивленій. Этому предмету посвящается вся слѣдующая глава. Однако, прежде чѣмъ приступить къ этому предмету, считаю необходимымъ, хотя вкратцѣ, уяснить нѣкоторыя стороны предмета, близко соприкасающіяся съ общимъ состояніемъ вопроса о сопротивленіи, потому что эта первая глава и назначена для ознакомленія съ этими общими сторонами занимающаго насъ дѣла. При этомъ я ограничиваюсь такими частями ученія о сопротивленіи, которыя или не развиты, или вовсе упущены въ вышеуказанныхъ русскихъ статьяхъ, имѣющихъ въ виду почти исключительно практику корабля.

Въ направленіи ученія о сопротивленіи среды за послѣднее время, по моему мнѣнію, важнѣйшую особенность составляетъ изученіе явленій, сопровождающихъ движеніе тѣлъ въ средѣ или совершающихся въ связи съ самымъ движеніемъ. Знакомство съ треніемъ открыло глаза, направило изслѣдователей. Но и здѣсь надо отличить существенное, общее—отъ частнаго и касающагося лишь до движенія плавающихъ тѣлъ, особенно до кораблей. Такъ, въ изученіи всѣхъ частностей сопротивленія корабля, конечно, имѣетъ большое значеніе точное знакомство съ волнами, сопровождающими корабль и образующимися на поверхности воды; можно даже допустить со Скоттъ-Росселемъ, что для розысканія наивыгоднѣйшей формы корабля это существенно, но для всей теоріи сопротивленія полное изслѣдованіе волнъ имѣетъ лишь побочное и отдаленное значеніе, потому что при движеніи тѣла, совершенно погруженнаго въ жидкость, это явленіе должно измѣниться. Иное дѣло—изученіе движенія воды, около носа и кормы корабля, сдѣланное тѣмъ же Скоттъ-Росселемъ, потому что во всякомъ случаѣ, водѣ-ли или иной какой жидкости нужно же куда нибудь дѣваться, когда на данное мѣсто вступаетъ движущееся тѣло и ей надо откуда то придти въ то пространство, которое остается за кормою корабля. Каковы направленія раздающихся частицъ жидкости или, какъ говорятъ [1]), струй, происходящихъ при движеніи тѣла въ средѣ? Каковы отношенія скоро-

[1]) Конечно, имѣя въ виду, что корабль идетъ, такъ сказать, мимо воды, а не вода мимо корабля. Струя здѣсь только слово, которое замѣнить нельзя.

стей въ этихъ струяхъ къ скорости движущагося тѣла? Какъ эти скорости измѣняются въ томъ каналѣ или въ томъ пространствѣ среды, которое занято возмущенною отъ движенія жидкостью? Каково отношеніе ширины этого канала къ поперечному сѣченію движущагося тѣла? Измѣняется ли это отношеніе съ перемѣною скоростей и съ другими условіями (перемѣною среды, миделя. температуры, формъ тѣла и т. п.)? Словомъ, каковъ механизмъ перемѣщенія жидкости? Это перемѣщеніе видимо, ясно понимаемо, но каково оно—до того и дѣла не было тому абстрактному отношенію къ вопросамъ сопротивленія, какого держались первые изслѣдователи этого вопроса. Имъ не интересовались и тогда, когда просто провѣряли ту или другую теорію. Для иныхъ или все рѣшается силою мышленія, или сводится на простую практику судоходства или морской архитектуры. А послѣ того, какъ славнѣйшіе мыслители—Ньютонъ, Эйлеръ, Бернулли и Д'Аламберъ, оказались или сами признали свое безсиліе въ пониманіи еще не изученнаго сопротивленія, когда Дю-Буа, Кулонъ, Бофуа открыли новые горизонты для обсужденія вопросовъ сюда относящихся—невольно, силою вещей, пришлось прямо адресоваться къ природѣ и разумно спрашивать у ней самой отвѣта на вопросы, касающіеся механизма сопротивленія, чтобы мысль и основная гипотеза анализа мирились съ природою дѣла. Но тѣ вопросы до сихъ поръ задавались еще рѣдко, такъ сказать робко, и отвѣты потому получались неясные. Только стало очевиднымъ, что безъ отвѣта на тѣ вопросы придется блуждать въ полумракѣ, который еще и понынѣ царствуетъ въ ученіи о сопротивленіи среды. Постараюсь однако познакомить читателя съ важнѣйшими изъ тѣхъ наблюденій сюда относящихся, которыя необходимы для пониманія новѣйшихъ теорій сопротивленія, хотя послѣднія обыкновенно (Скоттъ-Россель, Ранкинъ, Бурачекъ) и касаются лишь спеціально кораблей и избѣгаютъ прямого отношенія ко всѣмъ случаямъ сопротивленія.

Предъ площадкой, лодкой и т. п. тѣлами, движущимися на поверхности воды, замѣчается возвышеніе воды, а за ними углубленіе. Они измѣрялись въ опытахъ французскихъ академиковъ (стр. 21). Такъ напримѣръ для тѣла (№ 1), изображеннаго (гориз. разрѣзъ) на листѣ 2-мъ, черт. 17, получены слѣдующія возвышенія a—по срединѣ передней площадки (remou centrale) и b у ея краевъ (remou laterale):

Число секундъ на 20′=		8,54	7,95	7,42	6,75	6,38=t
Возвышеніе впереди	a=	21	23	26	34	36 линій.
» сбоку	b=	15	18	19	26	29 »
Сопротивленіе	r=	93	108,5	124	155	170,5 унцій.

Выражая скорость футами $\left(v=\frac{20}{t}\right)$, можно видѣть, что высоты въ срединѣ, т. е. a, возрастаютъ пропорціонально квадрату скорости, а именно $\frac{v^2}{a}$ или $\frac{400}{t^2a}$, а слѣдовательно и t^2a — есть по-

стоянная величина, а именно величина произведенія at^2 въ дѣйствительности получается=1531; 1454; 1432; 1549; 1465, среднее 1486. Слѣдовательно высота поднятія измѣняется, какъ сопротивленія (по закону v^2), и дѣйствительно частное изъ r на a почти постоянно (=4,4; 4,7; 4,8; 4,6; 4,7). Очевидно поэтому, что поднятіе воды у передней нормальной поверхности двигающагося тѣла отвѣчаетъ вполнѣ тому поднятію воды въ трубкѣ Пито (т. е. зависитъ лишь отъ скорости), которое наблюдалъ Дю-Бюа. Скотъ-Россель, самъ дѣлавшій подобныя наблюденія, принимаетъ, въ круглыхъ числахъ, что въ морской водѣ, при скорости 8 англ. футъ въ секунду, поднятіе воды передъ плоскимъ и нормальнымъ носомъ=1 футу, а затѣмъ эта высота a растетъ пропорціонально квадрату скорости, слѣдовательно вообще $a=\frac{v^2}{64}$ [1]), а сопротивленіе R на каждый кв. футъ плоской и нормальной поверхности, Россель, на основаніи прежнихъ наблюденій, принимаетъ равнымъ 1 англ. фунту при $v=1$, слѣдовательно вообще $R=v^2$, если R есть сопротив. на 1 кв. футъ въ англ. фунтахъ и v выражено въ футахъ.

Когда передняя или носовая часть движущагося по водѣ тѣла представляетъ форму вертикальнаго клина или двугранаго угла, то и тогда около передней оконечности вода поднимается [2]). Французскіе академики наблюдали и мѣряли это поднятіе. Напримѣръ для того же тѣла, изображеннаго на черт. 17, о которомъ шла рѣчь выше, наблюдались слѣдующія поднятія, когда тѣло двигалось впередъ клиномъ, а не плоскою поверхностью (тогда руль DH и поддерживающая его рамка CEFG были перенесены на сторону AB, въ этомъ видѣ оно означено въ отчетахъ объ опытахъ № 7-мъ).

---

[1]) Поэтому, вообще, если высоту поднятія a и скорость v выразить въ англійскихъ футахъ, то $\frac{v^2}{a}=64$. Такъ какъ 1 франц. футъ относится къ 1 англ. футу=324,8 : 304,8; то 20 франц. футовъ=21,3 фут. англ. Слѣдов. въ предшествующихъ франц. опытахъ $v_1=\frac{21,3}{t}$, а такъ какъ въ одномъ англ. футѣ 135 франц. линій, то $a_1=\frac{a}{135}$, а потому изъ французскихъ опытовъ $\frac{v_1^2}{a_1}=\frac{(21,3)^2 135}{t^2 a}=41,2$, такъ какъ $t^2a=1488$; полученное число отличается отъ Скотъ-Росселевскаго. Такъ какъ высота h, отвѣчающая скорости въ свободномъ паденіи тѣлъ, равна $\frac{v^2}{2g}$, а $g=32$ англ. футамъ, то очевидно, что Россель принимаетъ высоту поднятія воды равною высотѣ соотвѣтствующей скорости.

[2]) Надо думать, что и все тѣло поднимается носомъ вверхъ, кормою внизъ. Оттого, вѣроятно, въ числахъ наблюдателей встрѣчаются значительныя различія.

Число секундъ на 20′=	5,94	5,50	5,25	5,00	4,56	4,45
Возвышеніе въ срединѣ a=	24	29	33	36	38	39
» сбоку b=	0	0	0	0	4	6
Сопротивленіе, унцій =	77,5	93	108,5	124	155	186

Для соотвѣтственныхъ скоростей здѣсь поднятіе меньше, чѣмъ при плоскомъ носѣ. Когда было взято тѣло, горизонтальный разрѣзъ котораго изображенъ на 2-мъ листѣ, черт. 16, то къ нему приставлялись носовыя части разной степени остроконечности. Когда высота DQ была=30″ при ширинѣ AB=24″, тогда (тѣло это названо № 12, опыты № 114—120) получены слѣдующія числа:

Число секундъ на 20′=	7,25	6,80	6,43	6,10	5,56	5,12
Возвышеніе въ срединѣ a=	21	24	29	33	38	45
» сбоку b=	4	0	—4	—6	—	—
Сопротивленіе, унцій =	93	108,5	124	155	186	217

При соотвѣтственныхъ скоростяхъ здѣсь поднятіе меньше, чѣмъ для тѣла (№ 1) съ плоскостью впереди, но больше, чѣмъ у вышеприведеннаго примѣра (№ 7). Это объясняется тѣмъ, что здѣсь ширина=2′, а тамъ 1′. Видно также, что вода сбѣгаетъ по клинообразному носу легче, чѣмъ по плоскому.

Скотъ-Россель основалъ на явленіи поднятія воды передъ носомъ движущагося по водѣ тѣла цѣлую теорію сопротивленія. Хотя она совершенно односторонняя, потому что къ погруженному тѣлу неприложима, а опытъ показалъ, что сопротивленіе плавающаго и погруженнаго тѣла почти одно и тоже (значитъ поднятіе играетъ роль второстепенную въ опредѣленіи величины сопротивленія), но однако мы считаемъ полезнымъ дать о ней понятіе, тѣмъ болѣе, что и раньше Росселя—испанецъ Донъ-Жуанъ—исходилъ для составленія теоріи сопротивленія отъ явленія поднятія воды передъ носомъ корабля и опусканія воды за кормою. Полезно изложить мнѣнія Скотъ-Росселя сверхъ того не только потому, что онъ еще и понынѣ большой авторитетъ кораблестроенія, начинатель господствующей нынѣ школы практиковъ, но еще и потому, что онъ одинъ изъ тѣхъ, кто обратилъ вниманіе на многія побочныя явленія, сопровождающія движенія тѣлъ по водѣ, и воспользовался ими для теоріи сопротивленія и кораблестроенія. Хотя его пріемы основаны на правильномъ началѣ, и по возможности согласны съ дѣйствительностію, тѣмъ не менѣе у него видна въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ несомнѣнная поспѣшность заключенія отъ немногаго или малоизвѣстнаго ко многому неизвѣстному, какъ это станетъ очевиднымъ изъ тѣхъ соображеній, какими переходитъ Скотъ-Россель отъ поднятія воды передъ носомъ движущагося тѣла къ опредѣленію его сопротивленія. Россель разсуждаетъ примѣрно слѣдующимъ образомъ.

Когда движется впередъ нормальная плоскость и передъ нею поднимается вода, то она имѣетъ передъ собою пространство въ

180°, куда можетъ сливаться поднявшаяся жидкость. Если движется клинообразное тѣло съ вертикальнымъ ребромъ и съ наклонностію площадей 2α (гдѣ α уголъ встрѣчи воды съ плоскостью носа), притомъ такъ, что направленіе пути дѣлитъ уголъ призмы пополамъ, то, для поднимающейся воды остается свободное пространство для сливанія этой воды, равное 360°—2α. Далѣе Россель считаетъ сопротивленіе обратно пропорціональнымъ квадрату угла остающагося свободнаго пространства. Если назовемъ сопротивленіе нормальной площади чрезъ R, то сопротивленіе r клина при углѣ встрѣчи α будетъ въ отношеніи:

$$R : r = (360 - 2\alpha)^2 : (360 - 180)^2,$$

откуда слѣдуетъ, что относительное сопротивленіе призмы при углѣ встрѣчи α (уголъ призмы 2α):

$$\frac{r}{R} = \frac{(360-180)^2}{(360-2\alpha)^2} = \frac{90^2}{(180-\alpha)^2} = \left(\frac{1}{2-\frac{\alpha}{90}}\right)^2.$$

А потому при $\alpha = 60°$ и $\alpha = 30°$ сопротивленія относятся (конечно, при томъ же миделѣ) къ сопротивленію нормальной площади какъ 0,5625 и 0,3600 относятся къ 1. Но мы выше (стр. 22) видѣли, что французскіе академики нашли именно это отношеніе равнымъ 0,7710 : 0,4404 : 1. Тѣмъ не менѣе Россель ссылается именно на эти опыты (подлежащіе сомнѣнію въ своихъ подробностяхъ и численныхъ выводахъ, какъ увидимъ далѣе) для подтвержденія своихъ выводовъ, причемъ исходитъ изъ того, что беретъ для сравненія не прямо нормальную площадку, а клинъ, для котораго $\alpha = 60$. Дѣйствительно отношеніе сопротивленій для $\alpha = 60°$ и 30° по теоріи Росселя $= \frac{0{,}5625}{0{,}3600} = 1{,}56$, а по опыту $= \frac{0{,}7710}{0{,}4404} = 1{,}75$. Для $\alpha = 6°$ французскіе академики даютъ относительное сопротивленіе 0,3999; исходя изъ даннаго для 60°, получаемъ=0,3671, исходя изъ даннаго для $\alpha = 30$, получаемъ для 6°=0,3272. Такимъ образомъ сопротивленіе плоскогранныхъ тѣлъ, подобныхъ корабельнымъ носамъ, можетъ быть выражено, по мнѣнію Скотъ-Росселя, формулою

$$R = CM \left(\frac{90}{180-\alpha}\right)^2 v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XII.}$$

гдѣ C есть постоянный коэффиціентъ, независящій ни отъ угла встрѣчи α, ни отъ величины миделя M, ни отъ скорости v [1]). Замѣтимъ, что при этомъ нѣтъ и рѣчи о треніи. Идя далѣе въ

[1]) Уже изъ предшествующаго видно, что утверждать это Россель не имѣлъ права, но все же его формула лучше даетъ сопротивленіе призмъ, чѣмъ пропорціональность $Sin\alpha$ (Борда) или $Sin^2\alpha$ (Ньютонъ и др.), особенно для малыхъ угловъ. Потому то мы и привели выводъ этой формулы.

своемъ размышленіи о сопротивленіи, Скоттъ-Россель видитъ возможность достичь наименьшей траты на движеніе тѣла въ водѣ, придавая носу такую форму, при которой частицы воды наиболѣе легко скатывались бы по сторонамъ, не производя при этомъ ни возвышенія впереди тѣла, ни какихъ либо толчковъ или ударовъ другъ о друга, совершающихся при плоскогранной формѣ и ведущихъ тогда къ излишней тратѣ силы.

Очевидно, что для этой цѣли надо придать самой оконечности носа форму чрезвычайно остраго клина, непроизводящаго удара и постепенно расширяющагося, чтобы пріобрѣтаемая частицами скорость росла послѣдовательно, то есть сдѣлать для того переходъ отъ прямограннаго обвода къ вогнутой кривой, постепенно переходящей затѣмъ къ выпуклой. Послѣднее необходимо ради того, чтобы получить корабли съ надлежащею вмѣстимостію и дать возможность скользящимъ частицамъ постепенно потерять при переходѣ чрезъ мидель на корму всю пріобрѣтенную скорость. Такое разсужденіе очень важно исторически, не только потому, что послужило для введенія въ кораблестроеніе новыхъ формъ корабля, но и потому, что касается вопросовъ сопротивленія со стороны того процесса передвиженія частицъ среды, который до тѣхъ поръ почти оставленъ былъ безъ всякаго вниманія. Въ этомъ, по моему мнѣнію, главная заслуга изслѣдованій Скотъ-Росселя, относящихся къ тридцатымъ годамъ этого столѣтія. Хотя онъ направилъ свои соображенія на практическія задачи кораблестроенія — въ чемъ и достигъ того, что долженъ быть сочтенъ за родоначальника того направленія, которое нынѣ извѣстно подъ именемъ *струйной* и *волновой теоріи* кораблестроенія (а не сопротивленія, которое и Эйлеръ и Бернулли и многіе другіе разсматривали въ смыслѣ струй, какъ видно въ 3-мъ приложеніи)—тѣмъ не менѣе прямо или косвенно Скоттъ-Россель повліялъ на всю исторію ученія о сопротивленіи, что я и постараюсь теперь вкратцѣ показать, избѣгая тѣхъ подробностей, которыя касаются лишь кораблестроенія. Послѣднее изложено въ указываемыхъ выше русскихъ источникахъ и относится прямо къ спеціальному вопросу морскаго дѣла.

Чтобы узнать правильность своихъ разсужденій о способѣ движенія водныхъ частицъ около носа корабля, Скотъ-Россель построилъ три лодки одинаковой глубины, ширины и длины, считая отъ носа до миделя, двигалъ ихъ по спокойной водѣ съ одинаковою скоростію, и наблюдалъ за стеклянными шариками, имѣющими плотность немного меньшую, чѣмъ вода, и брошенными на поверхность воды въ томъ мѣстѣ, гдѣ должны были проходить лодки съ пріобрѣтенною скоростью. Когда носъ лодки представлялъ выпуклые обводы обычныхъ въ кораблестроеніи параболическихъ формъ, то шарики ударялись объ носъ, отскакивали отъ него и такъ сказать сильно путались передъ носомъ. Когда обводы были прямолинейны (т. е. носъ представлялъ плоскогранный клинъ), замѣча-

лось тоже явленіе, хотя въ меньшемъ развитіи, а когда двигалась третья лодка, у которой обводы сходились въ концѣ вогнутыми дугами, переходящими постепенно къ миделю въ выпуклыя кривыя, тогда шарики, не отскакивая, двигались вдоль бортовъ лодки, и передъ носомъ было наименьшее возвышеніе воды, а отсюда Россель заключилъ, что тогда и сопротивленіе было наименьшее, потому что не было излишней траты силы на сообщеніе напраснаго движенія шарикамъ, и они, какъ и частицы воды, получали лишь то движеніе по направленію, перпендикулярному къ пути лодки, которое неизбѣжно нужно дать частицамъ, потому что онѣ должны разступиться, чтобы пропустить лодку [1]).

Затѣмъ, проводя довольно произвольную аналогію между движеніемъ водяныхъ частицъ, разступающихся предъ носомъ корабля, и качаньемъ маятника, Скотъ-Россель доходитъ до формы корабельныхъ обводовъ, представляющихъ наименьшее сопротивленіе. Это суть формы *волновой линіи* или *синусъ-версоиды*. Чтобы по-

---

[1]) Опыты съ движеніемъ стеклянныхъ шариковъ, брошенныхъ на воду, играли большую роль въ исторіи кораблестроенія. Считаю не лишнимъ указать здѣсь путь болѣе легкій и удобный, потому что шарики трудно готовить. Если взять тяжелое нефтяное масло, употребляемое для смазки машинъ и нынѣ очень дешевое и всюду находящееся, да прибавить къ нему еще хлороформа или другой тяжелой жидкости, то можно сдѣлать жидкость любой плотности — чуть большей, чѣмъ вода, или едва меньшей. Насосомъ или просто шприцовкою такую жидкость легко разбрызгать на поверхность воды предъ носомъ двигающагося тѣла. Окрашенныя шарообразныя капли укажутъ тогда тѣ направленія, какія свойственны раздвигающимся частицамъ, и, если измѣнять плотность масла, можно сдѣлать видимымъ движеніе водяныхъ частицъ не только около поверхности воды, но и на глубинѣ, что особенно интересно. Такое же наблюденіе подводныхъ путей частицъ можно сдѣлать, если съ берега подвести подъ воду трубку, разбрызгивающую маслянистыя всплывающія капли въ моментъ прохода предмета по поверхности воды. Бросая на поверхность воды легко растворимыя (тяжелыя) краски (напримѣръ синюю анилиновую краску, какъ это дѣлалъ для одного опыта К. Д. Краевичъ), можно также сдѣлать поучительныя наблюденія, потому что падающія въ водѣ частицы красокъ оставляютъ за собою окрашенный слѣдъ, нѣкоторое время висящій въ жидкости. Еще проще, и безъ всякой особой подготовки, можно получить нѣкоторыя свѣдѣнія о путяхъ раздвигающихся и наступающихъ на корму водяныхъ частицъ, наблюдая движеніе лодки, или парохода, или, лучше, двигаемаго тягою судна во время осенняго ледохода, потому что мелкія частицы плавающаго льда совершенно сходны съ легкими шариками Росселя и др. Осенью 1879 г. на Невѣ я наблюдалъ въ это время за движеніемъ лодокъ и пароходовъ. Какъ общее явленіе, замѣчено мною, что ледъ, раздвигаемый носомъ, около миделя спускается немного внизъ и затѣмъ—что гораздо важнѣе—за двигающимся судномъ остается каналъ, свободный отъ льда, хотя бы судно шло по поверхности, сплошь покрытой кусками льда. Этотъ каналъ, повидимому, указываетъ на то, что въ кормовую пустоту, остающуюся за двигающимся тѣломъ, поступаютъ не поверхостныя массы воды (онѣ бы принесли съ собою ледъ), а вода, наступающая снизу. Если я не ошибаюсь, обыкновенно мореходы-практики думаютъ иначе. Вообще же въ опытѣ и наблюденіи надо искать ключъ къ задачамъ сопротивленія, а только за тѣмъ прилагать къ скопленному запасу силу анализа, если не желаютъ дискредитовать силу самаго анализа. Это основное положеніе я не устану повторять въ этой книгѣ.

строить ее, должно задаться полушириною корабля b (въ миделѣ) и длиною носа l. Возставивъ на концѣ носа корабля (въ горизонтальной плоскости или на поверхности водянаго уровня) перпендикуляръ длиною $= b$, опишемъ на немъ, какъ на діаметрѣ, кругъ и раздѣлимъ его полуокружность на n (произвольное число) частей. Изъ полученныхъ точекъ проведемъ линіи, параллельныя съ длиною корабля. Затѣмъ полудлину корабля l раздѣлимъ также на n частей, изъ нихъ возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ выше начерченными параллелями. Линія, соединяющая точки пересѣченія, будетъ волновая линія или синусъ-версоида или вогнуто-выпуклая кривая (съ перегибомъ) водяныхъ обводовъ носа для корабля наименьшаго сопротивленія, судя по мнѣнію Скотъ-Росселя. Онъ построилъ и корабль съ подобными обводами—назвалъ его «Wave» (Волна), сличилъ его сопротивленіе съ сопротивленіемъ кораблей такого же водоизмѣщенія при равныхъ скоростяхъ и нашелъ для своего корабля меньшее сопротивленіе. Такъ укрѣпилась волновая теорія постройки кораблей, основанная Скотъ-Росселемъ, который затѣмъ далъ и наивыгоднѣйшія длины носа, отвѣчающія скоростямъ, и указалъ, какую надо давать форму кормовымъ обводамъ корабля. Для насъ все это, малострогое по выводу и малооправдавшееся по опыту, разсужденіе имѣетъ лишь тотъ смыслъ, что первый приступъ къ вопросамъ сопротивленія со стороны механики невидимаго процесса, происходящаго при движеніи тѣла впередъ, уже послужилъ къ прямымъ практическимъ цѣлямъ; мы постараемся показать, что тотъ же пріемъ затѣмъ быстро отразился на всей теоріи сопротивленія. Самъ Россель, давшій вышеприведенную формулу (XII) для сопротивленія плоскограннаго, клинообразнаго носа, принимаетъ, что для призматическаго (ось призмы вертикальна) носа, образованнаго волновою линіею, при полуширинѣ b и длинѣ l (носа), сопротивленіе выразится формулою:

$$R = CM\left(\frac{b}{l}\right)^2 v^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XIII.}$$

гдѣ C тоже, что въ предшествующей формулѣ и при измѣреніи англійскими фунтами и футами $C = 1$. Сличая обѣ формулы, видимъ, что для плоскограннаго клинообразнаго носа въ 90°, для котораго $\alpha = 45°$ по первой формулѣ $R = CMv^2 0{,}444$, а по второй $(b = l)$ $R = CMv^2 1{,}000$, то есть въ 2,3 разъ больше. Если $\alpha = 30°$, то $b = \frac{1}{2} l$, а потому по формулѣ XII $R = CMv^2 0{,}36$, а по XIII $R = CMv^2 0{,}25$. Если возьмемъ сравнительно большія длины, какія бываютъ въ корабляхъ, напр. $\frac{b}{l} = \frac{1}{8}$, то $\alpha = 7°10'$, тогда по XII $R = CMv^2 0{,}27$, а по XIII $R = CMv^2 0{,}156$, а потому и выходитъ, что формула Росселя даетъ для волновыхъ обводовъ большее сопротивленіе, чѣмъ для плоскихъ (при одинаковой скорости, при томъ же отношеніи длины и ширины и при томъ же миделѣ), если

отношеніе длины къ ширинѣ мало, а если велико, какъ у кораблей, то для волновыхъ обводовъ сопротивленіе меньше, какъ это и есть въ дѣйствительности. Не надо доказывать, а само собою здѣсь ясно, какъ принаравливаетъ Россель все свое ученіе о сопротивленіи къ практикѣ корабля. Чуть вышли изъ нея — формулы уже даютъ результаты ни на чемъ неосновательные, ни на что не опирающіеся. Ту же самую принаровку къ практикѣ корабля видимъ и у многихъ другихъ новѣйшихъ изслѣдователей сопротивленія. Потому то всѣ попытки этого рода не имѣютъ сами по себѣ научнаго значенія, представляютъ грубый эмпиризмъ и освѣщаютъ дѣло не ровнымъ свѣтомъ научныхъ истинъ, а нѣкоторымъ невѣрнымъ блескомъ. Пойдемъ, однако, еще немного далѣе для того, чтобы видѣть яснѣе и лучше тотъ ничѣмъ почти нестѣсненный произволъ разсужденій, который господствуетъ, когда принимаются за научное обобщеніе съ одними прямыми практическими цѣлями.

Сперва, разсматривая сопротивленіе клиньевъ, Россель беретъ все получающееся на опытѣ сопротивленіе, не выдѣляя изъ него тренія. Переходя къ практикѣ кораблей, имѣющихъ большую длину и слѣдовательно большую подводную поверхность при данномъ поперечномъ (миделевомъ) сѣченіи, Россель вводитъ теперь треніе, признавая, что оно можетъ представлять половину всего сопротивленія, при значительныхъ скоростяхъ. Когда же въ 50-хъ годахъ были устроены по волновой теоріи длинные корабли и ихъ сопротивленіе оказалось не меньшимъ, чѣмъ у кораблей прежнихъ формъ, и бо́льшимъ, чѣмъ ожидалось по формуламъ, тогда Боурнъ (Bourne), а затѣмъ и многіе другіе, особенно же Ранкинъ, стали склоняться къ тому, что сопротивленіе кораблей волновой формы зависитъ главнѣйше лишь отъ тренія. Такъ родилась отъ Ранкина *фрикціонная теорія* сопротивленія корабля. Она изложена въ 8-мъ приложеніи къ этой книгѣ, въ популярномъ изложеніи Фроуда. Ея результаты приводятся во всѣхъ современныхъ курсахъ и статьяхъ, относящихся до кораблестроенія. Сущность дѣла сводится на то, что Ранкинъ выражаетъ все сопротивленіе (помимо того, которое зависитъ отъ волнъ и водоворотовъ) корабля произведеніемъ изъ коэффиціента тренія на квадратъ скорости и на величину подводной поверхности корабля. Но такъ какъ скорость у наклонной элементарной поверхности Ранкинъ считаетъ большею, чѣмъ скорость корабля, и измѣнчивою съ наклоненіемъ элементарной площадки [1]), что и естественно, то въ вычисленіи работы [2]) сопротивленія онъ и вводитъ кубъ этой перемѣнной

[1]) Весьма курьезно, что Буржуа, въ своемъ извѣстномъ сочиненіи: Mémoire sur la résistance de l'eau (par Bourgois, Paris), стр. 19, розыскиваетъ для опредѣленія тренія на наклонную плоскость уменьшенную поверхность — Surface frottante reduite, а Ранкинъ для того же случая ищетъ увеличенную поверхность; оба идутъ во многомъ параллельно.

[2]) Если сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, то работа его,

скорости. А именно: пусть скорость движенія (скольженія) воды по элементу поверхности dS будетъ w, когда скорость корабля$=v$, то работа тренія будетъ fw^3ds или fv^3q^3ds, если $q=\frac{w}{v}$, а такъ какъ сопротивленіе равно работѣ, дѣленной на скорость, то сопротивленіе элементарной площадки$=fv^2q^3ds$, гдѣ w или q есть перемѣнная, зависящая отъ измѣнчиваго уклона площадки. Очевидно, что сопротивленіе тѣла, напр. корабля, будетъ равно:

$$R = fv^2 \int q^3 ds.$$

Физическое значеніе этого интеграла есть нѣкоторая площадь, если сопротивленіе тренія выразить вообще произведеніемъ fv^2S, гдѣ S есть площадь параллельная съ направленіемъ пути и f— коффиціентъ тренія. Оттуда происходитъ названіе этого интеграла—*приращенною подводною поверхностью* (Augmented Surface). Собственно здѣсь принята во вниманіе измѣненная скорость, а не поверхность. Вотъ эту то величину измѣненной поверхности Ранкинъ и разсчитываетъ для тѣла призматическаго (ось призмы вертикальна), образованнаго волновыми обводами, такими какъ у Росселя и при высотѣ призмы h и при длинѣ L находитъ ее равною $2Lh\ (1+4\sin^2\beta+\sin^4\beta)$, гдѣ β есть уголъ (наибольшій), образуемый между направленіемъ движенія (осью корабля или продольною горизонтальною осью симметріи взятой призмы) и касательною къ волновой линіи въ мѣстѣ ея перегиба [1]). Разбивая площадями параллельными съ уровнемъ воды корабль, построенный по системѣ Росселя, на призмы, легко найдти приращенную поверхность подводной части корабля, которую означимъ чрезъ T. А изъ сопротивленія находится и работа для преодолѣнія тренія такого корабля; если принять притомъ нѣкоторый коэффиціентъ полезной работы винта, то можно вывести и силу машины въ лошадяхъ; она очевидно $= Cv^3T$, гдѣ C есть постоянная величина. Ранкинъ [2]) принимаетъ ее$=0{,}00005$, если v выразить узлами, а T выразить англ. кв. футами [3]). Нечего и думать о провѣркѣ по-

---

конечно, будетъ пропорціональна кубу скорости. Но для того разсчета, который дѣлаетъ Ранкинъ, кажется мнѣ, вовсе не слѣдовало вводить понятія о работѣ, а слѣдовало ограничиться самымъ сопротивленіемъ, тогда q вошло бы не въ кубѣ, а въ квадратѣ, и результатъ вышелъ бы другой. Такова шаткость всѣхъ понынѣ существующихъ геометрическихъ построеній, касающихся до сопротивленія, что ни самъ Ранкинъ и никто изъ воспроизводившихъ его формулу (а ее вездѣ воспроизводятъ, говоря о фрикціонномъ ученіи) не обращаютъ вниманія на произвольность замѣны сопротивленія — его работою, на замѣну v^2—кубомъ скорости.

[1]) Выводъ этотъ данъ въ Philosophical Transaction 1863 (T. 153), въ приложеніи къ статьѣ Ранкина о волнахъ, на стр. 136, а въ примѣчаніи на стр. 137 принято для f (коэф. тренія для крашенаго желѣза) значеніе 0,0036. Тотъ же предметъ элементарно развитъ въ извѣстномъ капитальномъ твореніи Rankine, Shipbulding theoretical and practical, 1866, pag. 81 etc.

[2]) Rankin, Shipbulding Theoretical and practical, p. 84.

[3]) Это выраженіе показываетъ, что для приданія скорости въ 1 узелъ на

добныхъ общихъ выводовъ, потому что коэффиціентъ тренія поверхности корабля зависитъ отъ ея состоянія: заростетъ она ракушками, или будетъ имѣть болты желѣзной обшивки, станетъ ржавая, или останется чисто мѣдною, — коэффиціентъ тренія будетъ мѣняться въ два и даже три раза [1]); а затѣмъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія у каждаго винта, у каждой скорости свой, а эти и другія измѣнчивыя величины входятъ въ C, величина же T чистая гипотеза — такъ что ничего и не остается для провѣрки. Какъ было шатко, такъ и послѣ того все осталось шатко. Причина тому ясная. Разсчитывается Ранкиномъ скорость скольженія воды по поверхности корабля, а ее, въ дѣйствительности, не знаютъ. А опытнымъ путемъ ее можно было бы узнать, еслибы хотѣли дѣйствительно искать просто сперва одной *правды*, а ужъ изъ нея выводить *истину* или законъ, какъ сдѣдуетъ дѣлать, а не спѣшили бы сразу захватить истину однимъ набѣгомъ ума. Найти же скорость скольженія воды по бокамъ, конечно, возможно и, пожалуй, скорѣе и точнѣе, чѣмъ приращенную поверхность. Конечно, въ ея разсчетѣ будетъ ошибка, допущеніе, геометрическое построеніе, только съ отступленіями прилагающееся къ дѣйствительности, какъ будетъ нѣкоторая погрѣшность и въ измѣреніи, но дѣло не въ томъ маломъ различіи отъ дѣйствительности, которое всегда въ опытѣ и измѣреніи неизбѣжно, а въ томъ, что разочтенная величина и въ мѣрѣ и во всемъ смыслѣ можетъ быть невѣрна, а наблюденная будетъ справедлива, по крайней мѣрѣ, въ крупныхъ чертахъ. Въ самомъ дѣлѣ, около поверхности судна скорость скольженія w воды можно считать или большею, или меньшею, чѣмъ скорость v самого корабля. Скольженіе w по наклонной плоскости больше v скорости движенія, если не признавать слоя воды, прилипшаго къ стѣнкамъ корабля, и если, затѣмъ, считать, что при проходѣ пути v частица воды по наклонной поверхности должна пройти путь $w = \frac{v}{\cos\alpha}$, гдѣ α уголъ встрѣчи. Но если держаться вмѣстѣ съ Дю-Бюа, Пуассономъ, Дюшменомъ, Стоксомъ и др. того, что около движущагося тѣла несется вмѣстѣ съ нимъ нѣкоторая масса увлекаемой жидкости, составляющая какъ бы жидкій носъ и жидкую корму, то въ самой этой жидкости, прилегающей къ движущемуся тѣлу, надо допустить скорость, близкую къ скорости тѣла, и окажется тогда, что скорость скольженія w

---

каждые 20000 кв. футовъ приращенной подводной поверхности корабля потребна одна лошадиная сила.

[1]) Вотъ примѣръ отъ Буржуа, взятый имъ отъ Бурна: желѣзный пароходъ *Мунх* послѣ постройки шолъ при 150-сильной машинѣ 8 узловъ, а чрезъ три мѣсяца пребыванія въ Темзѣ, когда поверхность покрылась осадкомъ, шолъ только 7,8 узловъ, развивая 165 силъ. Это показываетъ (если допустить, что все измѣненіе произошло только отъ поверхности, а не отъ машины или винта), что сопротивленіе возросло въ 1,6 разъ.

около поверхности меньше, чѣмъ скорость тѣла *v*. Тогда надо допустить, идя по нормали къ поверхности и начиная съ нея, что въ ближайшихъ частицахъ воды скорость скольженія мала, потомъ растетъ, достигаетъ гдѣ-то наибольшей, потомъ опять убавляется и постепенно переходитъ до нуля въ томъ мѣстѣ жидкости, на которомъ нѣтъ возмущенія при движеніи. И что вѣрно, и что вѣроятнѣе — опытъ рѣшить можетъ, измѣреніе сдѣлаетъ очевиднымъ, а одно умственное соображеніе и одинъ разсчетъ, основанный на допущеніи извѣстнаго предположенія—просто-на-просто не подвинетъ вопроса ни на шагъ дальше.

Итакъ, Скотъ-Россель началъ съ опытовъ, съ принаровки формулы къ измѣреніямъ французскихъ академиковъ, съ наблюденій. И это вноситъ въ разработку сопротивленія что-то новое, бросаетъ нѣкоторый свѣтъ. Кончилъ же онъ, а за нимъ и Ранкинъ, такими умственными построеніями, которыя такъ и остались непровѣренными, да которыя, надо признаться, и провѣрить какъ слѣдуетъ трудно, потому что все дѣло сведено на практику корабля и особенно на разсчетъ силы машины, потребной для сообщенія извѣстной скорости данному кораблю, а для рѣшенія этого надо знать много такого, что вовсе не составляетъ прямой задачи сопротивленія корабля, которую хотѣли рѣшать: надо знать состояніе поверхности, полезную работу винта и т. п., а потому и выходитъ, что провѣрки хода мыслей нѣтъ. Оттого нѣтъ убѣдительности во всемъ ходѣ умозаключеній. Дается теорія сопротивленія корабля, когда онъ обладаетъ извѣстными формами, представляетъ своими обводами нѣкоторую волновую (періодическую, синусоидальную, трохоидальную) кривую. Слѣдовало бы, кажется, провѣрить выводъ не надъ какимъ-либо грузовымъ кораблемъ, не въ практикѣ, гдѣ входитъ много посторонняго, а просто надъ моделью, наконецъ, надъ пустымъ кораблемъ, опредѣляя его сопротивленіе, въ зависимости отъ скорости, при помощи динамометра. Одинъ, хорошо обставленный, опытъ подобнаго рода убѣждалъ бы гораздо болѣе, чѣмъ много примѣровъ практики, гдѣ ни за одну цифру нельзя поручиться. Сверхъ того, вѣдь работа винта основана на той же силѣ сопротивленія, противу которой борется корабль при движеніи. Если теорія можетъ охватить случай корабля, она должна охватить и случай винта, и только тогда она будетъ имѣть дѣйствительное научное значеніе, а тогда и отдѣльный сложный опытъ въ практикѣ даннаго парохода будетъ имѣть цѣнность провѣрки всей теоріи. А приложить теорію одного чистаго тренія къ реакціонному сопротивленію пароходнаго винта, конечно, нынѣ вовсе нельзя; этого, само собою разумѣется, не думаетъ и Ранкинъ, а потому его воззрѣнія, по моему мнѣнію, не имѣютъ другаго интереса, кромѣ того, что въ нихъ съ особою рѣзкостью и впечатлительностью выражена та важная роль, которую играетъ треніе въ изученіи сопротивленія. Если искать начинателей подобнаго ученія, то они несомнѣнно явились раньше

Ранкина и, сколько я знаю, Сенъ-Венану и Стоксу принадлежитъ починъ *во фрикціонномъ ученіи*, производящемъ все сопротивленіе отъ тренія. Судя по статьямъ Сенъ-Венана, напечатаннымъ въ Comptes rendus парижской академіи, 1847, Т. 24, стр. 244, и въ извѣстномъ, хотя и мало распространенномъ, журналѣ L'Institut за 1846 годъ, стр. 100, должно думать, что еще въ 1834 году онъ представилъ во французскую академію мемуаръ, въ которомъ изложены начала фрикціонной теоріи, отвѣчающей парадоксу, выставленному Д'Аламберомъ и Ейлеромъ [1]) и состоящему въ томъ, что дѣйствіе воды на движущееся тѣло сводится къ нулю, если разсматривать и носовую, и кормовую части тѣла [2]). Тоже нынѣ въ иномъ видѣ учатъ послѣдователи струйной теоріи [3]). Можно это выразить проще всего такъ: если въ жидкости движется шаръ, двойной конусъ или тому подобное симметрическое тѣло, корма котораго равна носу, то оно тратитъ столько же силы на раздвиганіе жидкости своимъ носомъ, сколько пріобрѣтаетъ отъ жидкости, падающей на корму, а потому инерціонное сопротивленіе=0. Это будетъ справедливо и для тѣла всякой другой формы, если представить нѣкоторую идеальную жидкость, у которой нѣтъ другаго взаимнодѣйствія между частицами, кромѣ передачи давленія во всѣ стороны одинаково. Иное дѣло съ реальными жидкостями, обладающими сцѣпленіемъ и вязкостью, а потому и внутреннимъ треніемъ. Движеніе ихъ частицъ, происходящее какъ отъ раздвиганія носомъ, такъ и отъ стремленія идти въ пустоту, оставляемую кормою, передается сосѣднимъ частицамъ, разсѣвается въ массѣ жидкости и производитъ неизбѣжную затрату работы, словомъ, производитъ сопротивленіе. Оно и выставляется С.-Венаномъ, какъ результатъ внутренняго тренія, которое само есть сила, проявляющаяся между частицами жидкости, когда нѣкоторый ихъ слой (прилипшій къ твердому движущемуся тѣлу) движется и увлекаетъ сосѣднія, которыя однако движутся медленнѣе, чѣмъ слой жидкости, приводящій ихъ въ движеніе. Нѣкоторое количество движенія, нѣкоторая работа тратится при такой передачѣ, и въ суммѣ эта трата производитъ сопротивленіе движущагося тѣла. Движеніе, конечно, не пропадаетъ абсолютно, оно, какъ въ обычномъ треніи твердыхъ тѣлъ, превращается въ тепло. Вотъ, по моему мнѣнію, сущность фрикціонныхъ теорій. Очевидно, что внутреннее треніе будетъ поглощать еще больше силы и работы тогда, когда отъ совокупности двухъ, движущихся подъ разными углами, токовъ жидкости явятся вихри (вьюны, водовороты), какъ это случится яснѣе всего при движеніи угловатаго или плоскограннаго тѣла или тѣла съ шеро-

[1]) *D'Alambert*, Opusc. V—170, VIII—210. *Euler*. Nov. com. acad. scientia Petropolitanae, VIII — 187. Объ эти цитаты взяты мною изъ «Forschritte d. Physik» 1846, p. 67, 68.

[2]) См. приложеніе 3-е.

[3]) См. приложеніе 8-е.

ховатою поверхностью. Въ водопроводѣ произойдутъ такіе вихри, напримѣръ, въ томъ мѣстѣ, гдѣ будетъ или быстрое съуженіе, или быстрое расширеніе канала. При этомъ на массу M потеря живой силы, по Бернулли и Дю-Бюа, будетъ $\frac{1}{2}M(V^2-V_1{}^2)$, если V есть скорость до—и V_1 послѣ измѣненія ширины канала. По Борда, величина эта$=\frac{1}{2}$ M $(V-V_1)^2$ и Сенъ-Венанъ признаетъ это послѣднее выраженіе согласнымъ съ дѣйствительностью. Сенъ-Венанъ въ этомъ и многихъ другихъ частяхъ своего изслѣдованія прямо сравниваетъ сопротивленіе съ теченіемъ по трубкамъ и каналамъ, какъ дѣлаютъ и всѣ другіе вслѣдъ за нимъ. Здѣсь неумѣстно было бы вдаваться въ подробности ученія о теченіи воды по трубкамъ, хотя оно по существу и смыслу современныхъ ученій о сопротивленіи тѣсно связано съ этимъ послѣднимъ, но полезно замѣтить, что, хотя въ ученіи о теченіи жидкостей по трубкамъ, имѣется уже масса отличныхъ наблюденій и точныхъ эмпирическихъ выводовъ [1]), еще не настало даже для этого ученія періода полной теоретической выработки, чтобы можно было, безъ помощи особыхъ, каждый разъ новыхъ, эмпирическихъ коэффиціентовъ, зная одно внутреннее треніе жидкостей, строго рѣшить всѣ вопросы, сюда относящіеся, уже по одному тому, что есть скольженіе и внѣшнее треніе, нынѣ еще мало изученныя. Дѣло совершенно ясно только для очень узкихъ и длинныхъ трубокъ, благодаря тому, что Пуазель изъ опытовъ извлекъ законъ движенія въ нихъ жидкостей, а затѣмъ въ болѣе новое время Стоксъ (1847), Хагенбахъ [2]), Якобсонъ (1861) и многіе другіе связали этотъ законъ съ ученіемъ о внутреннемъ треніи или о вязкости (Zähigkeit, viscosité) жидкостей, такъ что внутреннее треніе жидкостей проще всего и опредѣляется истеченіемъ жидкостей изъ капиллярныхъ трубокъ [3]).

---

[1]) Укажу для примѣра на работы Прони, Ейтильвейна, Дарси, Жирара, Вейсбаха, Мейера, Хагена, Пуазеля, Грема и др.

[2]) *Hagenbach*, Pogg. Annalen, T. 109.

[3]) Литература этого предмета чрезвычайно обширна. Оно и понятно. Опыты этого рода производить можно въ кабинетѣ или въ лабораторіи, а теорія истеченія изъ узкихъ трубокъ возможна (и. ч. скорости малы) и интересна, такъ какъ касается вопросовъ гидродинамики, у которой, благодаря совокупному усилію экспериментаторовъ и геометровъ, есть уже твердыя основныя положенія, допускающія подробное ознакомленіе съ частностями, по крайней мѣрѣ въ простѣйшихъ случаяхъ. Главный толчекъ далъ во всякомъ случаѣ *Poiseuille*, своими измѣреніями (Annales de chimie et de physique, 1843, VII, Mémoires des savants etrang. T. IX, 1846) и тѣмъ выводомъ, что количества истекающей жидкости пропор. разности давленій (что зналъ Жираръ 1816 г.), четвертой степени діаметра и обратно пропорціональны длинѣ трубки. Коэффиціентъ этой пропорціональности находится въ простой зависимости отъ коэф. μ внутренняго тренія а именно: $\mu=\frac{\pi Pr^4}{8vl}$, гдѣ $\pi=3{,}14....$ P есть дѣйствующій при истеченіи перевѣсъ давленія, выраженнаго вѣсомъ (килограммы или чаще граммы на кв. метръ, прямо въ граммахъ, какъ у Хагенбаха, или въ абсолютныхъ массахъ, т. е. по раздѣленіи на $g=9{,}8$, какъ у Мейера, Стокса и большинства другихъ), r радіусъ капиллярной трубки, v объемъ

Лишь только отъ капиллярныхъ трубокъ приходится переходить къ трубкамъ значительныхъ діаметровъ — вліяніе стѣнокъ уменьшается, скорость возрастаетъ, дѣло измѣняется, законность истеченія становится болѣе сложною, менѣе ясною (потому выводы разныхъ изслѣдователей разнорѣчивы) и, главное, иною, чѣмъ для узкихъ капиллярныхъ трубокъ. Пусть данъ сосудъ, въ которомъ вода стоитъ на высотѣ h и въ тонкой стѣнкѣ дна круглое отверстіе діаметра d; тогда, по закону Торичелли, скорость истеченія будетъ $= \sqrt{2gh}$, а слѣдовательно въ 1″ вытечетъ объемъ $\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}$. Если, при той же разности давленія h на обоихъ концахъ трубки и при діаметрѣ d, будетъ происходить истеченіе чрезъ горизонтальную капиллярную трубку длиною l, то въ 1″ вытечетъ, по закону Пуазелля, объемъ$=k_1\pi d^2\frac{d^2h}{l}$, гдѣ k_1 есть свой постоянный коэффиціентъ, независящій ни отъ d, ни отъ h, ни отъ l, а только отъ природы жидкости и температуры. Если при томъ же перевѣсѣ h и при значительной длинѣ l, ширина горизонтальной трубки будетъ значительна, т. е. и d велико, то скорость истеченія изъ нея, по Навье, Прони, Ейтильвейну и др. (отбрасывая члены, имѣющіе малое вліяніе на результатъ), равна $a\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{d}{l}}+b$, а потому объемъ для 1″ времени будетъ равенъ $k^2\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{d}{l}}+k^3d$, гдѣ k^2 и k^3 суть опять новыя постоянныя, находимыя изъ опыта. Вейсбахъ для этого случая даетъ такое выраженіе количества, вытекающаго въ 1″:

$$\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{d}{kl}},$$

гдѣ $\pi=3{,}14\ldots$ $g=9{,}82\ldots$, а коэффиціентъ k тренія, по обозначенію Вейсбаха [1]) (при метрической системѣ), измѣняется со скоро-

---

вытекающей въ 1 секунду жидкости, равный объему w, вытекшему въ t секундъ, дѣленному на t, и l длина трубки. Такъ, напр., для воды въ опытахъ (очень сходные съ опытами Пуазеля), Шпрунга (*A. Sprung*: Experimentelle Untersuchungen über die Flüssigkeitsreibung bei Salzlosungen. Dissertation, Leipzig, 1876). $P=1{,}58$ метровъ водянаго столба, $r=0{,}2312$ миллиметра, $w=0{,}02115$ метра, $l=0{,}3$ метра, t при $0°=640″$, при $20°=368″$, при $40°=244″$. Отсюда, по Хагенбаху т. е. въ граммахъ, вязкость μ при $0°=0{,}182$, при $20°=0{,}102$, при $40°=0{,}068$, а въ грам. и абсолютн. массахъ $\mu=0{,}0141$; 0,010; 0,007 при 0°, 20° и 40°. Особенно много сдѣлано за послѣднее время работъ о внутреннемъ треніи въ газахъ, для которыхъ законъ истеченія изъ капиллярныхъ трубокъ въ сущности такой же, какъ для капельныхъ жидкостей. Гремъ (Philos. Trans, 1846, 1849), О. Мейеръ (Pog. Ann. 1866, T. 117, p. 253), Максвель и др. сдѣлали эту часть физическихъ свѣдѣній о газахъ очень совершенною, показавъ, что замедленія качанія дисковъ и опыты въ капиллярныхъ трубкахъ даютъ тотъ же результатъ.

[1]) Для того, чтобы получить ту величину коеф. тренія, о которой далѣе и ранѣе идетъ рѣчь, должно k Вейсбаха умножить на $\Delta=1000$ и раздѣлить на 8 g.

стію (выражаемой тѣмъ произведеніемъ корней, которое составляетъ множитель предшествующаго выраженія), а именно:

$$k=0{,}01439+\frac{0{,}0095}{\sqrt{v}},$$

при $v=0{,}1$ метра, $k=0{,}044$, при $v=1$ м. $k=0{,}024$, при $v=10$ м., $v=0{,}017$.

Хагенъ, Гразгофъ, Ранкинъ, Мейеръ, Дарси и почти каждый, кто занимался вопросами, касающимися водопроводовъ, даютъ опять свои формы выраженіямъ, назначеннымъ для опредѣленія скорости истеченія воды по трубамъ водопроводовъ. Въ численномъ результатѣ разсчеты сходятся при среднихъ, обычныхъ скоростяхъ и діаметрахъ, но общаго, твердо принятаго закона нѣтъ даже для случая прямой длинной трубки (не говоря уже объ изгибахъ, расширеніяхъ и т. п.). Несомнѣнно однако, что въ опытахъ, произведенныхъ въ тонкихъ капиллярныхъ трубкахъ, замедляющая сила или треніе оказалось почти пропорціонально первой степени скорости, а въ широкихъ трубкахъ—почти квадрату скорости, и что въ тѣхъ и другихъ оно почти не зависитъ отъ матеріала стѣнокъ, если онѣ гладки, и что оно зависитъ отъ разности давленій, но не отъ величины самаго давленія. Если обратить вниманіе на то, что при опытахъ въ тонкихъ трубкахъ вліяющія поверхности велики, а относительныя скорости малы, а при широкихъ трубкахъ обыкновенно скорости велики, а относительныя (къ массѣ протекающей воды) поверхности малы, то должно думать, что все дѣло тренія въ трубкахъ сведется къ одному общему закону [1]), въ которомъ при большихъ скоростяхъ окажутъ вліяніе тѣ члены, которые почти исчезаютъ при малыхъ, и обратно. Но до такого общаго закона еще повидимому не скоро дойдутъ въ гидродинамикѣ, потому что здѣсь, подобно тому, какъ въ вопросѣ сопротивленія, впадаютъ въ двѣ крайности — или скораго теоретизированія, безъ достаточнаго запаса широкихъ опытныхъ данныхъ [2]), или въ прилаживаніе обобщеній прямо къ извѣст-

---

[1]) Мнѣ кажутся особо настоятельными опыты въ тонкихъ трубкахъ при большихъ давленіяхъ и скоростяхъ и сверхъ того при разныхъ длинахъ, а въ широкихъ трубкахъ при очень малыхъ скоростяхъ и при очень большихъ длинахъ, а также съ разными другими жидкостями, а не съ одною водою. Опыты съ нефтепроводами уже имѣются въ Америкѣ и дали уже замѣчательные и неожиданные результаты. Если опытъ будетъ во главѣ—конечно, анализъ поддѣлается подъ его результатъ, и тогда покажется, что онъ и составляетъ всю сущность знанія.

[2]) O. Мейеръ въ Poggendorff's Annalen Jubelband (1871, стр. 1) дѣлалъ опыты съ трубкою въ 7 милл. внутренняго отверстія, длиною въ 3000 метровъ и нашелъ слѣдующія числа, причемъ давленія h, выраженныя у Мейера въ атмосферахъ, считая въ каждой 28 рейн. дюймовъ ртути, мѣряются здѣсь высотою столба воды въ метрахъ. Длины трубки означены чрезъ l въ метрахъ, объемы w даны для $1''$ въ куб. сантиметрахъ (милліон. доля куб. м)

нымъ практическимъ потребностямъ — здѣсь къ водопроводамъ. Недостаточная общность теоретическихъ началъ и недостаточность пріемовъ математическаго анализа явленій тренія видны изъ того уже, что, приступая къ разбору явленія, въ основныхъ уравненіяхъ, сразу обыкновенно отбрасываютъ нѣкоторые члены. Такъ при наиболѣе полномъ и успѣшномъ анализѣ внутренняго тренія необходимо начинаютъ съ того, что прямо отбрасываютъ члены, содержащіе квадраты скоростей [1]); это здѣсь возможно потому, что

	$h=$ 9,9	19,7	29,7	39,6	49,4
	$\sqrt{h}=$ 3,1	4,4	5,6	6,3	7,0
$l=$ 250	$w=$10,4	19,2	26,3	29,4	31,3
500	6,8	11,9	16,1	20,8	22,7
750	5,0	8,5	12,2	15,2	17,8
1500	2,9	5,3	7,5	9,4	10,9
3000	2,0	3,2	4,4	5,4	6,4

Очевидно, что здѣсь нѣтъ у вытекающихъ объемовъ w пропорціональности ни съ давленіемъ h (какъ у капиллярныхъ трубокъ), ни съ $\sqrt{h}$, какъ въ широкихъ трубкахъ, ни съ $\frac{1}{l}$, ни съ $\frac{1}{\sqrt{l}}$ и что дѣйствуетъ нѣкоторый средній законъ. Мейеръ признаетъ для временъ, выражающихъ истеченіе равныхъ объемовъ, нѣкоторый сложный законъ

$$t=\frac{A}{\sqrt{h}}+B\frac{l}{h}+C\frac{l^2}{h^2},$$

гдѣ B есть пуазеллевскій коэффиціентъ $\frac{8\mu w}{\pi r^4}$; но опыты Мейера, хотя очень интересны и достойны повторенія, едвали достаточно точны по условіямъ наблюденій. Вообще опыты съ трубками дѣлались, сколько мнѣ извѣстно, въ большинствѣ случайно съ трубами водопроводовъ, рѣдкіе съ длинными трубами, бывшими въ полномъ распоряженіи экспериментатора, діаметры видоизмѣнялись мало, температуры были едва извѣстны и т. п., словомъ еще недостаетъ для широкихъ трубъ настоящихъ точныхъ опытныхъ данныхъ. Оттого и нѣтъ связи между законами для широкихъ и тонкихъ трубъ. Теоретическій интересъ состоитъ здѣсь въ томъ, чтобы вмѣсто средней скорости теченія по всей ширинѣ трубки, какъ это принято у Прони, ввести, вслѣдъ за Навье, перемѣнную скорость отъ центра къ периферіи и узнать треніе взаимныхъ слоевъ жидкости, имѣющихъ разныя скорости и законъ измѣненія этихъ скоростей, идя отъ центра къ периферіи, также какъ и функцію скорости (въ капиллярныхъ трубкахъ это μv) при разныхъ ея величинахъ. Теорія предмета этого очень ясно изложена въ Cours de mécanique p. *Collignon*, Hydraulique p. 145 и слѣд. и въ Cours de mécanique p. *Bour* (1874)—350.

[1]) Напримѣръ въ капитальномъ сочиненіи Стокса, цитированномъ выше (стр. 42), дается начальное равенство движенія жидкости:

$$\frac{dp}{dx}=\varsigma\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}\right)+\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+$$

$$+\frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\text{и т. п.},$$

гдѣ p давленіе, ς — плотность, u, v, w слагающія скорости по прямоугольнымъ осямъ, X слагающая ускоренія, t время и μ коэфф. внутренняго тренія, Допустимъ, что это основное равенство полно, но для анализа его необходимо

скорости здѣсь малы. Для этого частнаго случая получается рѣшеніе, а общаго значенія оно и не имѣетъ. Поэтому общее ученіе о сопротивленіи до сихъ поръ немногое можетъ позаимствовать отъ разработки вопросовъ о внутреннемъ треніи и о движеніи воды по трубамъ, хотя вопросы чрезвычайно близки и хотя сравненіе сопротивленій при малыхъ скоростяхъ съ движеніемъ по трубкамъ съ малыми скоростями, а затѣмъ сопротивленія при большихъ (обычныхъ) скоростяхъ сравнительно съ теченіемъ воды въ трубахъ съ тѣми же (также обычными) большими скоростями—представляетъ много точекъ прикосновенія и одно должно помогать другому, особенно если будутъ приняты во вниманіе явленія, происходящія при угловыхъ и разныхъ другихъ изгибахъ трубъ. Понынѣ, сколько мнѣ извѣстно, еще никто не старался восполнить этотъ пробѣлъ въ гидродинамикѣ, и только Сенъ-Венанъ, Ранкинъ, и др. брали для разсчета сопротивленія паралл. плоскостей изъ знанія явленій теченія воды въ трубахъ, величину боковаго сопротивленія или тренія. Такъ, Ранкинъ, изъ разсчетовъ и опытовъ Вейсбаха надъ теченіемъ воды въ новыхъ, гладкихъ, желѣзныхъ трубахъ, опредѣляетъ треніе на 1 кв. футъ плоскости, параллельной съ направленіемъ движенія, равнымъ $0{,}0036\ v^2$ англійскихъ фунтовъ, если v выражено футами и есть скорость движенія воды по трубѣ; слѣдовательно треніе равно $0{,}189\ v^2$ кило на квадр. метръ, если скорости выражены метрами [1]). Мы видѣли выше (стр. 58), что, изъ прямыхъ опредѣленій Бофуа, треніе при метрической системѣ $= 0{,}16v^2$, если считать треніе прямо пропорціональнымъ съ v^2, а изъ опредѣленій Фроуда для скоростей отъ 1 до 3 м., принимая опять пропорціональность съ v^2, треніе (стр. 72) на 1 кв. метръ$=0{,}14v^2$ кило. Изъ этого видно, что хотя существуетъ разность обоихъ родовъ опредѣленія тренія, но сравнительно небольшая, объясняемая, если угодно, тѣмъ, что въ трубкахъ внѣшнее треніе больше, чѣмъ въ доскахъ Бофуа и Фроуда. Чтобы выяснить связь между треніемъ, опредѣляемымъ по теченію воды, и тѣмъ боковымъ сопротивленіемъ, которое даютъ

упростить, пренебрегая членами съ квадратомъ скорости и пренебрегая вліяніемъ сжимаемости, а потому анализъ начнется съ допущенія упрощеннаго дифференціальнаго равенства:

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right) - \rho\frac{du}{dt} \text{ и т. п.}$$

Тоже, напр., у Мейера, Pogg. Annalen, т. 117-й, и у всѣхъ другихъ.

[1]) Дѣйствительно, если принять вышеуказанный (стр. 94) коэффиціентъ тренія, принятый Вейсбахомъ за неизмѣнный при большихъ скоростяхъ, т. е. пренебречь членомъ, содержащимъ въ знаменателѣ $\sqrt{v}$, то получится число $k=0{,}01439$ (принятое Вейсбахомъ), но судя по разности обыкновеннаго обозначенія отъ Вейсбаха (желающіе найдутъ достаточныя указанія при сличеніи Weisbach Lehrbuch d. theoretische Mechanik 5-te Auflage 1870 p. 1014 съ Collognion Cours de Mécanique (1870), Hydraulique. p. 159), величину k слѣдуетъ раздѣлить на $8\ g$ и помножить на $\Delta=1000$, что и дастъ 0,18 для коэф. тренія.

опыты Бофуа и Фроуда, разсмотримъ въ элементарной формѣ законъ равномѣрнаго теченія рѣки. Назовемъ чрезъ Q площадь каждаго изъ двухъ поперечныхъ сѣченій рѣки, чрезъ L разстояніе этихъ поперечныхъ сѣченій, чрезъ h разность высотъ или уровней въ этихъ сѣченіяхъ, чрезъ Δ вѣсъ куб. метра воды; вѣсъ всей массы воды между избранными сѣченіями будетъ $QL\Delta$. Этотъ вѣсъ падаетъ съ высоты h, слѣдовательно работа тяжести на всемъ пути, въ данное время t, $= QL\Delta h$. Она, очевидно, должна быть равна работѣ сопротивленія на томъ же пути, въ то же время, если движеніе вполнѣ установилось, сдѣлалось равномѣрнымъ. Но сопротивленіе только одно и есть, что треніе о дно и по бокамъ рѣки, а оно выражается произведеніемъ площади на нѣкоторую функцію скорости. Эта послѣдняя, какъ мы видѣли выше (стр. 50, 58, 72), близка къ kv^2, но ей неравна, а можетъ быть лучше выражена или чрезъ cv^n, гдѣ n есть степень, близкая ко 2-й, или суммою $av + bv^2$, какъ мы выше и выразили опыты Бофуа и Фроуда, или $av^2 + \sqrt{v^{bv^2}}$, какъ принимаетъ Вейсбахъ, или вообще $f(v)$. Слѣдовательно, примѣняя выраженіе $(av + bv^2)$, мѣра силы тренія есть вѣсъ $Lq\,(av+bv^2)$, гдѣ q есть смачиваемый периметръ рѣчнаго дна, а Lq поверхность дна рѣки между взятыми ея сѣченіями. Этотъ сопротивляющійся вѣсъ дѣйствуетъ на всемъ пути L (въ то время t, когда дѣйствующій грузъ упадетъ на высоту h, сопротивляющійся пройдетъ путь L), слѣдовательно работа сопротивленія $= L^2q\,(av + bv^2)$. Обѣ работы въ установившемся движеніи должны быть равны другъ другу, а потому:

$$QL\Delta h = L^2q\,(av + bv^2).$$

Отсюда

$$\frac{Q}{q}\cdot\frac{h}{L} = \frac{av+bv^2}{\Delta}, \text{ или вообще } = \frac{f(v)}{\Delta}\ ^1)$$

Дроби $\frac{Q}{q}$ и $\frac{h}{L}$ даются изученіемъ рѣкъ, напр. $\frac{h}{L}$ есть *паденіе* рѣки, Δ въ метрической системѣ $= 1000$, а потому изученіе рѣкъ или измѣненіе въ нихъ скорости (подразумѣвается средняя скорость всего сѣченія) даетъ треніе. Работы надъ рѣками и особенно надъ каналами многихъ изслѣдователей, начиная съ Дю-Бюа—начинателя гидродинамики,—показали, что эта функція скорости $f(v)$ почти одна и та же при дѣйствительно установившемся теченіи (гдѣ Q, q, h и качество дна постоянны для данной части рѣки), хотя скорости разныхъ рѣкъ и каналовъ, качество дна,

---

[1]) Эту самую величину при изученіи тренія по трубкамъ найдемъ, зная радіусъ трубки r, т. что $Q = \pi r^2$; $q = 2\pi r$; h есть тамъ дѣйствующее давленіе, а L длина трубки. Для капиллярныхъ трубокъ $f(v) = \frac{4}{r}\mu . v$, то есть измѣняется съ радіусомъ и пропорціонально первой степени скорости. Базенъ показалъ нѣчто подобное для водопроводныхъ трубъ.

объемъ протекающей въ единицу времени и т. п. условія значительно измѣняются. Величина тренія на квадратную мѣру дна, обусловливающая движеніе рѣкъ, показывается этимъ постоянствомъ лучше, чѣмъ какимъ либо другимъ способомъ, и оно же объясняетъ измѣненіе скоростей въ данномъ сѣченіи, начиная отъ береговъ и поверхности (гдѣ вязкость для воды больше [1]), такъ что наибольшая скорость (подобно тому какъ въ трубѣ) соотвѣтствуетъ нѣкоторой струѣ, идущей посреди рѣки въ небольшой глубинѣ подъ уровнемъ (а въ трубѣ почти въ центрѣ ея). Всего же важнѣе обратить вниманіе на числа, полученныя Дю-Бюа (1779), Ейтильвейномъ (1801), Вольтмономъ, Брюнингомъ, Дарси и Базеномъ, Гьюмфри и Абботомъ (Humphreys and Abbot) и многими другими изъ опредѣленія скоростей v, сѣченій Q, поперечныхъ периметровъ q и паденій $\frac{h}{L}$. Они сведены Прони, Сенъ Венаномъ, Дарси, Хагеномъ, Гангюилле и многими другими [2]). Большинство выражаетъ $f(v) = av + bv^2$. Вліяніе a мало, главная роль b. Прони, Ейтильвейнъ и Ламейеръ даютъ для b значенія 0,309, 0,366 и 0,378, для a величину 0,044, 0,024 и 0,022. Сенъ-Венанъ [3]) принимаетъ $f(v) = 0{,}401v^n$, гдѣ $n = \frac{21}{11}$. Вейсбахъ (для трубъ) считаетъ $f(v) = av^2 + b\sqrt{v^3}$. Брамсъ (1753), Тадини и другіе выражаютъ $f(v) = kv^2$, гдѣ $k = 0{,}4$. Въ новѣйшее время изслѣдователи примѣняютъ болѣе сложныя формулы. Таковы формулы Гьюмфри и Аббота, Базена (1865) и др. Такъ Базенъ принимаетъ $f(v) = \left(a + \frac{b}{r}\right) v^2$, гдѣ a и b постоянныя, $r = \frac{Q}{q}$. Величина a приниминается мѣняющеюся отъ 0,15 до 0,28 и b отъ

[1]) Это показываютъ *для воды* и ея растворовъ опыты Плато съ очевидностію (см. *J. Plateau* Statique expérimentale et théorique des liquides. Paris, Gautier-Willars. 1873 T. II. Chapitre VII). Онъ показалъ, что вязкость многихъ жидкостей на поверхности больше, чѣмъ внутри. Для этого внутри и на поверхности жидкостей онъ опредѣлялъ время одного размаха магнитной стрѣлки, уклоненной съ востока на западъ (собственно при уклонѣ отъ магнитнаго меридіана на 85°) и приходящей къ нормальному положенію. Приводимъ среднія его числа, помѣщая въ числителѣ время (секунды) одного размаха данной стрѣлки, наблюденное на поверхности, а въ знаменателѣ—внутри жидкости. Вода $\frac{4{,}6}{2{,}4}$, глицеринъ $\frac{2160}{1170}$, насыщенный растворъ соды $\frac{8{,}0}{4{,}6}$, селитры $\frac{4{,}4}{2{,}4}$. У другихъ жидкостей обратно. Спиртъ $\frac{1{,}5}{3{,}3}$, скипидаръ $\frac{1{,}4}{3{,}4}$, оливковое масло $\frac{30{,}3}{79{,}5}$, эфиръ $\frac{1{,}1}{1{,}5}$, сѣроуглеродъ $\frac{1{,}2}{2{,}0}$. Хотя метода и сомнительна по точности, но различія такъ велики и наблюдатель такъ хорошъ, что общій смыслъ явленія должно считать установленнымъ несомнѣнно.

[2]) Подробное и обстоятельное изложеніе этого предмета, равно какъ и сводъ изслѣдованій, касающихся теченія воды по трубамъ, находится у *Grashof*, Theoretische Maschinenlehre. T. I—723 (1874).

[3]) Annales des mines (4) XX, Sonnet Dictionnaire des Mathématiques appliquées (1867), стр. 174.

0,004 до 0,35, смотря по степени гладкости поверхности дна канала [1]).

По существу дѣла ясно, что понятіе о треніи, какъ о препятствіи или сопротивленіи, то есть о силѣ, свойственной водѣ, даже и здѣсь не уяснено окончательно ни опытнымъ, ни теоретическимъ путемъ. То, что называется здѣсь треніемъ, имѣетъ только нѣкоторое, отдаленное отношеніе къ предмету, насъ занимающему, то есть къ опредѣленію боковаго сопротивленія (сопротивленія по направленію параллельному съ путемъ) тѣла, движущагося въ водѣ.

На 1 кв. метръ гладкой поверхности, при скорости=1 метру, треніе составляетъ лишь 0,18 [2]) кило, по изслѣдованію Бофуа. Туже почти величину даютъ опыты Вейсбаха надъ стеклянными и новыми, свѣжими металлическими трубами, какъ видно было выше и что принялъ Ранкинъ. При $v=1$ метру получается треніе= 0,15 [3]) килограмма по Фроуду, если движется твердое тѣло съ гладкою поверхностью въ неподвижной водѣ. А когда течетъ вода, то, судя по предшествующему, въ трубахъ и рѣкахъ треніе достигаетъ 0,37 кило на кв. метръ при $v=1$, то есть въ два раза больше первой величины. Извѣстно, что при осадкахъ въ трубахъ и неровностяхъ дна каналовъ величина эта еще ростетъ. Вся замѣчаемая разность можетъ быть приписана однимъ неровностямъ поверхностей трубъ и каналовъ, потому что опредѣленія Фроуда показываютъ, что треніе поверхности грубаго песка почти въ два раза превышаетъ треніе гладкой поверхности. Такъ напримѣръ (прилож. 7-е) на 20 футахъ разстоянія, на 1 кв. футъ треніе гладкихъ поверхностей (при скорости = 10 фут.) = 0,24 фунта, для поверхности же, покрытой грубымъ пескомъ=0,49 фунт. А описывая опыты этого изслѣдователя (стр. 69), мы видѣли, что получаемыя для неровной поверхности величины сопротивленій состоятъ изъ: 1) тренія или боковаго сапротивленія, и 2) такъ называемаго прямаго сопротивленія, принадлежащаго массѣ отдѣльныхъ песчинокъ. Слѣдовательно прямые результаты, полученные въ рѣкахъ и трубахъ, не даютъ прямо тренія. Это выражаютъ, допуская, такъ называемое, скольженіе, различая внѣшнее треніе отъ внутренняго—

[1]) Такія же формулы и выводы, столь же согласные въ крупныхъ числахъ, какъ между собою, такъ и съ числами, полученными для открытыхъ каналовъ, и столь же разнообразные по способу ихъ выраженія, получаются для широкихъ трубъ. Это показываетъ малое вліяніе стѣнокъ. Кромѣ того прямые опыты показываютъ, что въ водопроводныхъ трубкахъ сопротивленіе не измѣняется съ величиною давленія. Особенный интересъ въ этомъ и многихъ другихъ отношеніяхъ составляютъ практически важныя изслѣдованія Дарси (Recherches experimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, 1857), который прямо наблюдаетъ разность уровней въ двухъ манометрахъ, сообщающихся съ двумя мѣстами трубы, по которой течетъ вода, и наблюденную разность высотъ дѣлитъ на длину, что и даетъ ту величину, которую нѣмцы называютъ Leitungswiderstandhöhe. Болѣе полныя опытныя и теоретическія изслѣдованія принадлежатъ Хагену, Мейеру и Бусинеску.

[2]) По формулѣ $0{,}029\ v+0{,}1536\ v^2$, стр. 58.

[3]) По формулѣ $0{,}122\ (v^2+0{,}27\ v)$, стр. 72.

первое у поверхности твердаго тѣла объ его неровности, а второе — только между частицами жидкости. Ясно, что дѣло становится неуловимо сложнымъ, и произволъ въ примѣненіи къ практикѣ не уничтожается, хотя подробности дѣла и уясняются. И теперь, послѣ многихъ изслѣдованій о треніи (хотя разнообразія и точности въ опытахъ еще и мало) жидкостей, еще нельзя, нѣтъ никакого права, не только считать треніе за причину всякаго сопротивленія, но даже и опредѣлять его мѣру въ разныхъ случаяхъ при разныхъ скоростяхъ. Все то общее, что нынѣ можно сказать по отношенію къ измѣренію тренія жидкостей, мнѣ кажется, заключается въ слѣдующемъ:

1) Треніе есть сопротивленіе (т. е. сила), которое рождается между жидкостью и тѣломъ (будетъ ли это таже или другая жидкость или твердое тѣло—все равно) при относительномъ ихъ движеніи. Притомъ все равно—движется ли твердое тѣло въ жидкости или жидкость около твердаго тѣла. Въ обоихъ случаяхъ мѣра сопротивленія, при прочихъ равныхъ условіяхъ, одна и таже. Въ опытахъ Кулона, Максвеля и др. движется дискъ въ неподвижной жидкости, а у Пуазелля движется вода въ неподвижной каппиллярной трубкѣ—внутреннее треніе выводится одно и тоже, считая его пропорціональнымъ v. Точно также изъ опытовъ Вейсбаха надъ трубками и Бофуа надъ доскою—выводится одна величина тренія, считая его пропорціональнымъ v^2.

2) Треніе это не зависитъ отъ давленія, подъ которымъ совершается, и опредѣляется скоростію, природою жидкости и мѣрою трущихся поверхностей. Поэтому оно глубоко отличается отъ тренія твердыхъ тѣлъ, а потому его было бы приличнѣе называть касательнымъ (тангенціальнымъ), или параллельнымъ, или продольнымъ сопротивленіемъ [1]).

3) Опредѣленію подлежали до сихъ поръ только тѣ случаи тренія жидкостей, когда направленія трущихся плоскостей совпадали съ направленіемъ движенія. Какъ велико треніе на наклонныхъ плоскостяхъ — неизвѣстно по опыту [2]), но во всякомъ слу-

---

[1]) Названіе «поверхностное сопротивленіе» гораздо хуже, потому что на поверхности могутъ быть неровности, возвышенія и тогда родится прямое сопротивленіе. Притомъ поверхность можетъ быть наклонною и даже нормальною, а каково тогда треніе—мы не знаемъ.

[2]) Вотъ какой родъ опредѣленій, мнѣ кажется, можетъ дать объ немъ хоть нѣкоторое понятіе, весьма важное для утвержденія фрикціонной теоріи. Слѣдуетъ опредѣлить при данной скорости обычнымъ способомъ (на параллельныхъ площадяхъ и доскахъ, какъ у Бофуа или Фроуда) треніе нѣкоторой гладкой и нѣкоторой шероховатой (напр. песчаной, какъ у Фроуда) площади. Затѣмъ опредѣлить сопротивленія призмы (хотя бы съ кривыми гранями, какъ у корабля) съ опредѣленными углами встрѣчи, покрывъ ея бока, наклонные къ направленію движенія, или гладкими, или шероховатыми плоскостями (или поверхностями), такими же, какъ прежде. Если сопротивленіе зависитъ лишь отъ тренія, оно возростетъ въ обоихъ случаяхъ одинаково. Если въ обоихъ случаяхъ при нормальной плоскости выйдетъ нѣкоторая разность сопротивленій, то можно будетъ сдѣлать уже нѣкоторыя дальнѣйшія заключенія.

чаѣ должно предполагать, что на наклонной плоскости оно больше, чѣмъ на параллельной; это потому, что относительную скорость скольженія или тренія на наклонной плоскости при уклонѣ α можно предполагать *близкою къ* $\frac{v}{\cos\alpha}$, если на параллельной плоскости скорость$=v$. А такъ какъ сопротивленіе растетъ почти какъ квадраты скоростей, то если сопротивленіе параллельной плоскости $=k$, то для наклонной оно близко къ $\frac{k}{\cos^2\alpha}$. Поэтому можно думать, что при уклонѣ въ 30° оно близко къ 1,33 k, при уклонѣ$=60°$, оно близко къ 4,00 k. Но подобное абстрактное заключеніе (равно какъ и заключеніе о работѣ тренія) нельзя считать вѣрнымъ, уже по одному тому, что при уклонѣ въ 90° сопротивленіе было бы тогда безконечнымъ, потому что $\cos 90°=0$. Въ дѣйствительности же нормальная плоскость представляетъ нѣкоторое конечное, ограниченное сопротивленіе. Изъ этого одного видно, во-первыхъ, что треніе наклонной плоскости менѣе, чѣмъ $\frac{k}{\cos^2\alpha}$, а во-вторыхъ— что необходимо получить прямыя численныя данныя для тренія на наклонныхъ плоскостяхъ, если желательно имѣть нѣкоторую твердость въ примѣненіи фрикціоннаго ученія къ объясненію сопротивленія.

4) Треніе ростетъ со скоростью и притомъ, повидимому, при очень малыхъ скоростяхъ (нѣсколько миллиметровъ въ 1″), оно пропорціонально первой, а при значительныхъ достижимыхъ скоростяхъ (до 8—10 метровъ въ секунду) почти пропорціонально второй степени скорости. Если это такъ, то всего проще выразить треніе (подобно тому, какъ предложилъ Кулонъ, вообще, для сопротивленія) двучленомъ $av+bv^2$. Тогда станетъ понятнымъ, что при малыхъ скоростяхъ треніе пропорц. v, при большихъ v^2, а при обычныхъ выражается суммою $av+bv^2$, какъ это и видимъ въ опредѣленіи тренія въ рѣкахъ, въ трубахъ и въ опытахъ Бофуа и Фроуда. Допущеніе пропорціональности первой степени скорости при малыхъ скоростяхъ дѣлается на основаніи опытовъ надъ колебаніемъ дисковъ въ водѣ (Кулонъ, Мейеръ) и воздухѣ (Максвель, Мейеръ, Кунтъ) и надъ истеченіемъ воды и газовъ изъ капиллярныхъ трубокъ (Пуазель, Гремъ, Хагенъ, Хагенбахъ и др.). Однако, до сихъ поръ нѣтъ достаточно прямыхъ опытовъ для твердаго сужденія объ этомъ предметѣ, хотя онъ имѣетъ, можно сказать, капитальнѣйшее значеніе для многихъ частей гидродинамики [1]).

[1]) По моему мнѣнію, слѣдовало бы сдѣлать прямыя измѣренія тренія даннаго тѣла при самыхъ разнообразныхъ скоростяхъ. Для этого подходящимъ способомъ, мнѣ кажется, можетъ служить приборъ, изображенный на 11-мъ листѣ, черт. 145 и 146. На вертикальной оси ab, приводимой въ движеніе грузомъ e, при помощи нити, проходящей чрезъ блокъ d и намотанной на цилиндръ c, закрѣпляются или двѣ цилиндрическихъ поверхности A и B (черт. 145), или три диска C,D,E (черт. 146). Когда они поставлены вдали другъ

5) Когда поверхность, подвергающаяся тренію, представляетъ значительные размѣры, тогда несомнѣнно можно *допустить*, во всѣхъ случаяхъ, что мѣра тренія пропорціональна мѣрѣ поверхности. Но когда поверхность мала [1]), тогда можно думать, что треніе сравнительно больше, чѣмъ по пропорціональности съ большею поверхностью. Такое заключеніе можно сдѣлать, изучая треніе въ трубкахъ. Яснѣе всего это видно въ законѣ Пуазелля, касающемся истеченія изъ капиллярныхъ трубокъ. Законъ этотъ есть $O = \frac{\Delta\ \pi r^4 h}{8\mu l}$, гдѣ O объемъ жидкости, вытекающій въ 1″ при давленіи h чрезъ трубку, радіусъ которой $= r$, а длина l, μ есть постоянное=коэф. внутренняго тренія. Средняя скорость истеченія v очевидно $= \frac{O}{\pi r^2}$. Если здѣсь треніе пропорціонально первой степени скорости, то, пользуясь уравненіемъ, даннымъ на стр. 97, имѣемъ (такъ какъ $Q=\pi r^2$, $q=2\pi r$, $\frac{Q}{q} = \frac{r}{2}$): $\frac{hr}{2l} = \frac{f(v)}{\Delta}$, откуда $f(v)=\Delta r \frac{h}{2l}$. Но по закону Пуазелля $\Delta r \frac{h}{2l} = \frac{0.4\mu}{\pi r^3} = \frac{\pi r^2 v 4\mu}{\pi r^3} = \frac{4\mu}{r} v$, слѣд., здѣсь $f(v) = \frac{4\mu}{r} v$. Здѣсь видно: во-первыхъ, что треніе $f(v)$ пропорціонально первой степени скорости, а во-вторыхъ, что коэфиціентъ пропорціональности растетъ съ уменьшеніемъ радіуса или уменьшается съ его возрастаніемъ, что выше и объяснено. Ту же зависимость коэф. тренія отъ радіуса нашелъ въ результатѣ многихъ опытовъ (около 200) Дарси для водопроводныхъ трубокъ. Онъ выводитъ, напримѣръ, для чугуна, что та величина, которую мы выше обозначили чрезъ $f(v) = v^2(0{,}2535 + \frac{1}{r} 0{,}00323)$, если скорость больше 100 миллим. Для діаметра трубы въ 0,5 метра $f(v)$, по его опытамъ $= 0{,}266$, при діаметрѣ же 0,1 метра она $= 0{,}318$, а при діаметрѣ 0,01 метра $f(v)=0{,}9$, если стѣнки еще не покрыты осадкомъ [2]). Подобнаго же

отъ друга, какъ изображено на чертежахъ, тогда при вращеніи треніе дѣйствуетъ на бо́льшую поверхность. Но если ихъ сдвинуть, то масса останется таже (треніе въ подшипникахъ и цилиндрахъ тоже), а поверхность уменьшится. Такъ цилиндрическая поверхность B можетъ плотно вдвинуться въ A, а диски C и E могутъ быть плотно приложены къ диску D. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ поверхность уменьшится около въ три раза. Опредѣляя грузъ e, сообщающій данную скорость вращенія въ случаѣ сдвинутыхъ и раздвинутыхъ частей, мы по разности найдемъ треніе выбывающей поверхности. Производя же опредѣленія при разныхъ скоростяхъ вращенія, найдемъ зависимость тренія отъ скорости. Подобный приборъ заказанъ мною, и при помощи его я надѣюсь рѣшить нѣкоторые вопросы о треніи жидкостей, потому что многія поправки обычныхъ опытныхъ данныхъ здѣсь уничтожаются. На чертежахъ изображена только схема прибора.

[1]) И, можетъ быть, когда радіусъ кривизны малъ, какъ это будетъ въ трубкахъ малаго діаметра.

[2]) Cours de Mécanique, Hydraulique. Collignon. 1870, p. 180, 184.

результата достигъ Вейсбахъ [1]). Эта зависимость тренія или параллельнаго сопротивленія отъ линейныхъ размѣровъ поверхности (отъ радіуса кривизны) представляетъ одно изъ обстоятельствъ, долженствующихъ значительно усложнить дѣло изученія сопротивленій, если выводы для трубокъ окажется необходимымъ примѣнять во всѣхъ случаяхъ тренія. Общность такого вывода или его непримѣнимость къ объясненію всѣхъ явленій тренія опять можетъ рѣшить только правильно поставленный опытъ. Для этого достаточно опредѣлить треніе нѣсколькихъ движущихся поверхностей одной и той же величины, но различныхъ по сложенію, напримѣръ, цилиндрической и призматической, при различной длинѣ и ширинѣ. Должно, однако, не забывать, что даже и для трубокъ только при малыхъ поперечныхъ размѣрахъ чувствительно вліяніе поперечныхъ размѣровъ, при большихъ же размѣрахъ (какъ напримѣръ, у корабля), вліяніе сглаживается и становится въ рядъ неизбѣжныхъ погрѣшностей разсчета и опыта. Изучая и примѣняя въ практикѣ вопросы сопротивленія, не должно, однако, упускать изъ виду указанную сторону предмета [2]).

Когда говорится о поверхностномъ треніи жидкостей вообще, тогда должно, конечно, отличать треніе гладкихъ и шероховатыхъ плоскостей, но явленіе въ послѣднихъ сложно и состоитъ изъ тренія въ собственномъ смыслѣ и изъ сопротивленія неровностей (внѣшнее треніе), какъ это доказано нами на стр. 69. Треніе, въ тѣсномъ смыслѣ этого слова, или продольное (касательное) сопротивленіе, судя по всему, что̀ знаемъ — одно и тоже (по крайней мѣрѣ при обычныхъ и особенно при малыхъ скоростяхъ) для всякихъ гладкихъ смачиваемыхъ поверхностей твердыхъ тѣлъ, потому что зависитъ отъ взаимнодѣйствія прилипшаго (хотя бы и подвижнаго) слоя жидкости и остальной ея массы; оно по своей природѣ тождественно съ тѣмъ, что называютъ внутреннимъ треніемъ или особымъ индивидуальнымъ качествомъ жидкостей (и газовъ). Отъ этого рода тренія зависитъ трата силы, по той причинѣ, что часть движенія отъ твердаго тѣла (или обратно) передается жидкости и въ ней превращается (прямо или косвенно, сперва въ вихри) подъ-конецъ въ теплоту. Сопротивленіе же неровностей того же рода, какъ и сопротивленіе нормальной движущейся пластинки. Такъ какъ, на данной плоскости, неровности могутъ быть весьма различны по качеству и количеству, то постоянства коэф. тренія здѣсь ждать нельзя,

[1]) Lehrbuch d. theorch. Mechanik. 1870, p. 1016. «Коэф. сопротивленія для тренія воды при движеніи по трубамъ уменьшается съ возрастаніемъ какъ скорости, такъ и съ возрастаніемъ діаметра, хотя въ этомъ послѣднемъ отношеніи медленнѣе».

[2]) Быть можетъ, что даже точнѣйшіе опыты покажутъ вновь независимость сопротивленія отъ діаметра, если движеніе совершается въ безграничной средѣ, какъ можно думать это по совокупности данныхъ, нынѣ извѣстныхъ о сопротивленіи (глава 3) шарообразныхъ тѣлъ.

понятіе о треніи, какъ объ единственной причинѣ сопротивленія, было вѣрно, то потребовалось бы при этомъ увеличить силу машины въ 4 — 5 и болѣе разъ, чтобъ достичь тѣхъ же скоростей. А въ крайнихъ случаяхъ, сколько мнѣ извѣстно изъ отчетовъ о дальнихъ плаваніяхъ, замѣчаютъ, даже послѣ сильнаго обрастанія дна, возрастаніе въ тратѣ двигателя (напр. топлива) для полученія той же скорости много, что въ 2 раза [1]).

Изъ всего этого слѣдуетъ, что треніе жидкостей есть важный элементъ сопротивленія, что оно измѣняется также какъ сопротивленіе, а потому можетъ съ нимъ смѣшиваться, но что оно недостаточно хорошо обслѣдовано для поверхностей наклонныхъ, а потому: 1) можно дѣлать съ нѣкоторою увѣренностью поправку на треніе только для поверхностей параллельныхъ съ направленіемъ движенія, да и то въ случаѣ гладкости поверхности, и 2) треніе наклонныхъ плоскостей и всякихъ шероховатыхъ не поддается еще разсчету, а вслѣдствіе этого 3) при изученіи сопротивленія, вообще напр. для нахожденія формъ приличныхъ кораблю или тѣламъ наименьшаго сопротивленія и для нахожденія формъ наибольшаго сопротивленія, приличныхъ двигающимъ органамъ (винту, крылу и т. п.), не слѣдуетъ въ большинствѣ случаевъ выдѣлять треніе отъ всѣхъ другихъ видовъ сопротивленія, а слѣдуетъ, пока, изучать сопротивленіе въ его мѣрѣ, не отличая тренія и не вдаваясь пока въ разборъ того, откуда оно ведетъ свое начало. Относительно тренія жидкостей важнѣе всего замѣтить, что при обычныхъ скоростяхъ его законы очень близки къ общимъ законамъ сопротивленія. Такъ напримѣръ тотъ и другой родъ силъ ростетъ почти пропорціонально квадрату скорости. Это позволяетъ дѣлать сліяніе и это объясняетъ исторію начала изслѣдованій сопротивленія, когда треніе не принималось вовсе въ разсчетъ.

Поэтому въ слѣдующей главѣ, посвященной разбору измѣреній сопротивленія, мы разсматриваемъ его, не отличая въ большинствѣ случаевъ тренія, а говоря лишь о сопротивленіи вообще. Фрикціонная и инерціонная теоріи сопротивленія—объ не могутъ быть сочтены за достаточно совершенныя; надо ждать иныхъ пріемовъ для геометрическаго разбора явленій сопротивленія. Изученіе ихъ должно быть пока—дѣломъ наблюденія, опыта и измѣренія.

---

[1]) Слыхалъ я, но подлинныхъ данныхъ не знаю, что подъ вліяніемъ ученія о треніи, какъ о господствующей силѣ сопротивленія, стали заботиться о тщательной полировкѣ пароходныхъ винтовъ и подводныхъ частей корабля, но желаемыхъ выгодъ не получили. Подлинныя данныя были бы очень интересны.

ГЛАВА II.

Измѣреніе сопротивленій.

Измѣренія, касающіяся силъ, составляютъ ту важную часть знанія, которая предполагаетъ уже нѣкоторое знакомство съ силами и чаще и скорѣе другихъ способовъ знанія ведетъ къ обладанію измѣряемыми силами, потому что въ мѣрѣ и числѣ умъ находитъ твердую опору для провѣрки своихъ построеній и попытокъ постиженія сущности дѣла. Поэтому способы измѣренія сопротивленій и самая ихъ мѣра заслуживаютъ главнаго вниманія при изученіи занимающаго насъ предмета, если желательно выбраться въ немъ изъ области схоластики и эмпиризма въ сторону истиннаго пониманія. Практикѣ прямо нужны тѣ числа, которыя получаются при этихъ измѣреніяхъ. Гипотезы и теорія должны основаться на мѣрѣ сопротивленій, ею оправдываются и при ея помощи будутъ совершенствоваться. Не надо забывать однако, что нерѣдко числа, получаемыя въ обычной практикѣ, бываютъ результатомъ такихъ наблюденій, въ которыхъ сочетаются разныя неопредѣлимыя условія и обстоятельства, запутывающія пониманіе, а не упрощающія его. Для пониманія же дѣла, то есть для истиннаго обладанія теоріею, а чрезъ нее и практикою предмета, и для построенія гипотезъ, необходимы цифры *опытовъ*, когда опредѣленныя обстоятельства измѣняются, вліяніе же другихъ по возможности устраняется, или когда вліяніе невозможныхъ для устраненія обстоятельствъ строго опредѣляется и на нихъ дѣлается поправка. Такъ напримѣръ для практики особенно важно знаніе сопротивленія плавающихъ на водѣ тѣлъ, особенно такихъ, которыя имѣютъ форму судовъ. Но здѣсь поверхностное волненіе, образованіе волнъ, сопутствующихъ движущемуся тѣлу, перемѣны температуры, сопротивленіе воздуха и т. п. неустранимыя вліянія усложняютъ пониманіе явленія въ его чистотѣ. Поэтому для теоріи сопротивленія во много разъ цѣннѣе измѣренія, полученныя для тѣлъ вполнѣ погруженныхъ, сравнительно съ плавающими, и даже опыты въ маломъ видѣ сравнительно съ опытами въ большихъ размѣрахъ, потому что при этомъ легче и вѣрнѣе устранимы

препятствія точности (напр. волненіе, вѣтеръ, неравенство температуръ и т. п.). Практикѣ мореходнаго дѣла, на первый взглядъ, нужнѣе всего найдти связь формъ парохода съ тратою угля для полученія желаемой скорости. Но отысканіе этой связи, даже и при тысячѣ измѣрительныхъ наблюденій, едва ли дастъ что иное, кромѣ грубой и вполнѣ эмпирической зависимости, примѣнимой только въ данномъ частномъ случаѣ, потому что связь сложна и въ числѣ перемѣнныхъ будутъ: формы парохода, формы винтоваго двигательнаго органа, устройство топки паровика и машины, треніе механизмовъ, скорость, волненіе, кренъ, даже просто качества топлива, механиковъ и истопниковъ. Освободить отъ всѣхъ этихъ вліяній одно желаемое, напримѣръ форму корабль, практически нельзя.

Поэтому поучительны для сопротивленія не всякія измѣренія, наблюденія и опыты, для того назначавшіеся. Числа числамъ рознь: одни—стѣсняющій балластъ, другія—двигающій грузъ. Притомъ изъ многихъ родовъ наблюденій возможно извлечь только относительныя, а не абсолютныя числа, да и то приближенныя. А потому въ этой главѣ, посвященной измѣреніямъ сопротивленій, нашли мѣсто не всѣ извѣстныя мнѣ измѣренія, а только тѣ, хотя бы завѣдомо несовершенно полныя и невполнѣ точныя, которыя представляются мнѣ поучительными въ положительномъ или отрицательномъ смыслѣ.

Цѣль, преслѣдуемая мною при собираніи матеріала и при его обработкѣ, состоитъ въ томъ, чтобы сопоставить въ одномъ мѣстѣ всѣ извѣстныя мнѣ поучительныя измѣренія сопротивленій, сличить ихъ между собою, отобрать изъ нихъ наиболѣе достовѣрныя и тѣмъ положить основаніе для возможности узнанія истинныхъ законовъ сопротивленія и для составленія при ихъ помощи затѣмъ гипотезъ и теорій, согласныхъ съ природою всего дѣла. Не думаю при этомъ вовсе о томъ, чтобы мнѣ самому воспользоваться собраннымъ; буду однако дѣлать свои замѣчанія, а, главное, хочу обратить вниманіе другихъ на—почти нынѣ забытые—интересы сопротивленія и желаю облегчить новымъ силамъ путь, давши имъ запасъ прежнихъ измѣреній, на собираніе котораго (по возможности изъ подлинниковъ) я самъ потратилъ немалое время. Словомъ, приступаю къ дѣлу безъ предубѣжденій, безъ готовой гипотезы и стараюсь быть возможно объективнымъ, излагая то, что не мною сдѣлано, и если прибѣгаю къ опредѣленному, какъ бы теоретическому пріему, пользуясь выраженіемъ:

$$\text{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R = k\Delta M v^2,$$

то лишь потому, что иначе нельзя сдѣлать сличимыми между собою измѣренія разныхъ наблюдателей и въ разныхъ случаяхъ.

Выраженіе I требуетъ, чтобы сопротивленіе R измѣнялось пропорціонально плотности Δ, плоскостной мѣрѣ M поперечнаго (къ направленію пути) сѣченія и пропорціонально квадрату скорости v. Еслибъ это было такъ, то величина коэффиціента k выходила бы

одна и таже при разныхъ плотностяхъ, сѣченіяхъ и скоростяхъ для всякихъ наблюденій, касающихся тѣлъ подобныхъ, представляющихъ одни и тѣже углы встрѣчи или одинаковый законъ смѣны этихъ угловъ, напримѣръ для всякихъ шаровъ, плоскостей, наклоненныхъ подъ извѣстными углами (если M, Δ и v перемѣнны), или для разныхъ подобныхъ конусовъ, или для разныхъ нормальныхъ площадей и т. п. Если же для данной формы величина k будетъ непостоянна при разныхъ Δ, M и v, то все же можно изъ нея извлечь измѣненіе сопротивленія съ перемѣною Δ, M и v, какъ изъ неносредственнаго опыта. Напримѣръ, получая разныя k_1, k_2, k_3 для скоростей v_1, v_2, v_3, можно легко видѣть и выразить зависимость сопротивленія отъ скорости, или считая $k=f(v)$ или прямо помножая k_1 на ${v_1}^2$ и сличая $k_1{v_1}^2$ съ $k_2{v_2}^2$, $k_3{v_3}^2$ и т. д. и затѣмъ находя зависимость этихъ произведеній отъ скорости. Если $kv^2 = \eta\,(v)$, и если функція $\eta\,(v)$ станетъ извѣстна изъ опыта, то очевидно, что $R = M\Delta\eta(v)$. Слѣдовательно, разсчитывая для удобства сличеній вмѣсто R величину k, мы не предрѣшаемъ законовъ сопротивленія, а дѣлаемъ только ихъ выводъ болѣе легкимъ. Это особенно потому такъ: 1) что главная и естественная цѣль изслѣдованій сопротивленія—найдти зависимость R отъ формы тѣлъ, а сличеніе величинъ k также приведетъ къ зависимости сопротивленія отъ формы, какъ и прямое сличеніе величинъ R при одинаковыхъ Δ, M и v, и 2) что множество опытовъ прямо показываютъ, что сопротивленіе R, если невполнѣ точно, то по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи, дѣйствительно почти пропорціонально и Δ, и M, и v^2, слѣдовательно въ величинахъ k должно замѣчаться различіе преимущественно въ зависимости отъ формы тѣла, то есть отъ его относительной длины, угловъ встрѣчи, радіусовъ кривизны и т. п.

И такъ величины k [1]), которыя мы станемъ далѣе сличать, выводятся каждый разъ изъ наблюденныхъ въ опытѣ Δ, M, v и R, потому что мы условно означаемъ:

$$k = \frac{R}{\Delta M v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad II$$

[1]) Это k относится къ тѣмъ K и K_1, которыя мы примѣняли въ 1-й главѣ (стр. 11—19), какъ $\sin^2\alpha{:}1$ и какъ $\frac{\sin^2\alpha}{2g}{:}1$, если имѣемъ дѣло съ плоскостями, а если имѣемъ дѣло съ тѣлами, то какъ интегральная функція синусовъ угла встрѣчи (см. приложеніе 2-е) относится къ единицѣ. Тѣ коэффиціенты не зависѣли отъ формы тѣла и отъ угловъ встрѣчи, а это k есть функція угловъ встрѣчи и формъ тѣла. Законы Ньютона (прил. 1-е) и обыкновенной теоріи (прил. 2-е) оказались наиболѣе слабыми по отношенію къ угламъ встрѣчи и къ формамъ тѣла, а потому мы и вводимъ величины k, которыя преимущественно выражаютъ измѣнчивость сопротивленія отъ угловъ и формъ. Если бы законы сопротивленія также хорошо прилагались къ формамъ, какъ къ скоростямъ или размѣрамъ M, то вмѣсто k было бы нагляднѣе, удобнѣе ввести величины K или K_1.

Величину k мы будемъ называть *коэффиціентомъ сопротивленія* данной формы тѣла, напр. шара, призмы и т. п.

Всѣ величины относятся нами къ метрической системѣ измѣренія, а именно тамъ, гдѣ особо не сказано, въ какой мѣрѣ даны измѣренія, должно считать, что:

k есть сопротивленіе *въ килограммахъ* (или, иногда, въ граммахъ, если сопрот. мало) для тѣла, опредѣленной (указанной въ выводѣ) формы движущагося со скоростію 1 метра въ секунду и имѣющаго поперечное сѣченіе =1 квадр. метру, въ жидкости, которой одинъ куб. метръ вѣситъ 1 килограммъ. Поэтому, если желаемъ знать k для воды, должно его умножить на 1000, а для воздуха въ обычныхъ условіяхъ (около) на 1,2.

R есть наблюденное сопротивленіе въ килограммахъ, при данной формѣ и значеніяхъ Δ, M и v.

Δ вѣсъ въ килограммахъ одного куб. метра той жидкости, въ которой происходитъ движеніе. Приближенно, для воздуха, при обычныхъ въ опытахъ температурахъ (около 15° Ц.) и давленіяхъ (около 750 миллиметровъ барометрической высоты), $\Delta=1{,}2$, а для воды для обыкновенныхъ температуръ Δ около 1000. Точныя числа плотностей воздуха и воды даются въ физическихъ сочиненіяхъ и приведены, между прочимъ, въ моихъ сочиненіяхъ: *О соединеніи спирта съ водою* (1865, стр. 40 и 54), *Объ упругости газовъ* (Т. I. 1875, стр. 61—66) и *О барометрическомъ нивеллированіи* (1876, стр. 13—23 и 181).

M наибольшее поперечное (то есть перпендикулярное къ направленію движенія) сѣченіе тѣла [1]).

v скорость, *считая ее равномѣрною* [2]), въ секунду въ метрахъ, или число метровъ, проходимыхъ въ одну секунду.

Если измѣренія даны изслѣдователемъ въ другихъ единицахъ, напр. въ футахъ и фунтахъ, то это всегда ясно обозначается въ изложеніи и при этомъ всегда дается общій выводъ по метрической системѣ.

Находя значенія k, мы не отличаемъ теперь въ этой величинѣ тренія отъ прямаго сопротивленія, какъ то дѣлаютъ, по примѣру

---

[1]) Очевидно, что для одного и того же куба, призмы и т. п. тѣлъ (только не для шара) величина M измѣняется, смотря по измѣненію направленія движенія. Напр. если дана квадр. призма, высоты h, въ основаніи $a \times b$ метровъ, то при движеніи вдоль призмы $M = ab$, а при движеніи въ направленіи перпендикулярномъ оси и сторонѣ a, $M=hb$; при уклонѣ—опять иное.

[2]) При неустановившемся движеніи (ускоренномъ или замедленномъ) нельзя ждать такой простой зависимоети между R и v, какъ при равномѣрномъ установившемся движеніи, а потому случаи перваго рода (вообще, мало изученные и представляющіе свой, особый интересъ) мы избѣгаемъ разсматривать и только паденіе тѣлъ вводимъ въ разсчеты, но предпочитаемъ, когда (какъ при паденіи относительно легкихъ тѣлъ) начальная скорость быстро достигаетъ предѣльной, постоянной скорости, да еще разсматриваемъ случай замедленнаго движенія ядра, потому что онъ хорошо обработанъ въ артиллерійскихъ опытахъ, и еще потому, что на краткомъ разстояніи скорости почти постоянны.

Бофуа, большинство позднѣйшихъ писателей, а особенно Буржуа, потому что выкидывать треніе можно съ увѣренностію только для плоскостей или поверхностей, параллельныхъ съ направленіемъ движенія, а во всѣхъ другихъ случаяхъ, преобладающихъ въ изслѣдованіяхъ, нельзя этого сдѣлать потому, что мѣра тренія неизвѣстна для площадей нормальныхъ или наклонныхъ къ пути. Какова напр. величина тренія для шара? Отвѣчать на это можно только задаваясь гипотезою объ измѣненіи тренія съ наклономъ элементарной площадки, а считать треніе на всякую поверхность равнымъ тренію на параллельную съ путемъ площадь—есть тоже гипотеза, притомъ лишенная всякаго основанія. Только впослѣдствіи, послѣ свода опытныхъ данныхъ, мы можемъ возвратиться опять къ опредѣленію роли тренія во всей мѣрѣ сопротивленія, выражаемой величинами R и k.

Отчетъ объ измѣреніи сопротивленій я считаю наиболѣе удобнымъ расположить по способамъ, примѣнявшимся при измѣреніяхъ, потому что прямыя данныя опытовъ необходимо подвергать различнымъ поправкамъ и переводамъ, о которыхъ удобнѣе говорить сразу для цѣлой системы данныхъ, полученныхъ одинаковыми или подобными пріемами. По этой причинѣ, говоря объ извѣстномъ способѣ нахожденія сопротивленій, мы должны сперва коснуться теоріи каждаго изъ опытныхъ пріемовъ.

Перечислимъ главные способы, служившіе до сихъ поръ для измѣренія сопротивленій. Должно прежде всего ясно отличить тѣ способы, въ которыхъ двигается среда (вода или воздухъ), отъ тѣхъ, гдѣ движется тѣло въ неподвижной средѣ. Первые, говоря вообще, мало надежны, по той причинѣ, что скорости движенія среды неодинаковы и трудно опредѣляемы съ достаточною точностію. Такъ вода рѣкъ течетъ неодинаково быстро на разныхъ глубинахъ, на разныхъ разстояніяхъ отъ береговъ, въ разныхъ мѣстахъ рѣки на той же глубинѣ и на томъ же разстояніи отъ береговъ, смотря по близости и профилю дна, смотря по вѣтру и т. п. Это ясно показано еще въ прошломъ столѣтіи Дюбюа, а въ 60-хъ годахъ нашего столѣтія, особенно послѣ знаменитыхъ работъ американцевъ (Humphreys and Abbot) надъ теченіемъ Миссисипи и др., предметъ этотъ подвергся обширной и точной разработкѣ, заставляющей сомнѣваться въ достоинствѣ чиселъ, получающихся для сопротивленія неподвижныхъ тѣлъ, помѣщенныхъ въ воду. Не менѣе шатки опредѣленія, производимыя въ струѣ вѣтра. Непостоянство скорости вѣтра на данной высотѣ извѣстно каждому, кто имѣлъ случай дѣлать опредѣленіе этихъ скоростей въ теченіи быстро слѣдующихъ другъ за другомъ временъ наблюденій. Качанія привязанныхъ аэростатовъ и змѣйка показываютъ, что и на нѣкоторомъ удаленіи отъ земли скорость вѣтра непостоянна. Близъ земной поверхности, гдѣ дѣлались до сихъ поръ подобныя опредѣленія, даже въ самомъ направленіи вѣтра происходятъ тѣмъ болѣе частыя и замѣтныя измѣненія, чѣмъ слабѣе

сила вѣтра. Самые способы опредѣленія скоростей вѣтра подлежатъ сомнѣнію по одному тому, что анемометры обыкновенно или не регулируются, или ихъ регулированія производятся въ неподвижномъ воздухѣ комнаты, заставляя ихъ двигаться по кругамъ съ опредѣленною скоростію, а такой способъ, при всѣхъ поправкахъ [1]), включаетъ предположеніе о томъ, что сопротивленіе тѣлъ и давленіе на нихъ одинаково при движеніи среды съ тѣмъ, которое отвѣчаетъ движенію тѣла, а это подлежитъ, послѣ изслѣдованій Дю-Бюа (стр. 30), сомнѣнію и во всякомъ случаѣ требуетъ особой опытной провѣрки потому уже, что регулированіе дѣлается поневолѣ въ ограниченномъ пространствѣ комнаты, а не въ безграничной средѣ. Остается тотъ способъ опредѣленія скоростей вѣтра, который употребляли Маріоттъ, Тибо и др., а именно скорость полета пуха; но онъ по своему существу не допускаетъ ни отчетливости, ни удобства, а потому его результаты мало надежны. Для метеорологическихъ цѣлей разные анемометры, дающіе среднюю скорость вѣтра или путь, пройденный вѣтромъ въ часъ (или въ секунду, что узнается уже по разсчету), могутъ считаться удовлетворительными, но для полученія сопротивленій важно знать скорость вѣтра въ моментъ наблюденія, а ее то и нѣтъ средствъ знать съ достаточною точностію, при современномъ запасѣ пріемовъ. Еще менѣе, чѣмъ въ рѣкѣ и на вѣтру, надежны опредѣленія, производимыя при помощи искусственнаго теченія воды и воздуха въ искусственныхъ каналахъ, струяхъ, трубахъ и т. п., потому что размѣры поясовъ съ постоянными скоростями токовъ здѣсь еще болѣе ограничены, вслѣдствіе неизбѣжной въ подобномъ случаѣ малости размѣровъ искусственныхъ приспособленій. Всякія опредѣленія сопротивленій въ текущей водѣ и въ движущемся воздухѣ имѣютъ однако цѣнность, особенно при значительномъ числѣ наблюденій, когда въ среднихъ величинахъ можно думать, что скорость движенія среды опредѣлена удовлетворительно, и еще тогда, когда единовременно изслѣдуются давленія на разныя тѣла [2]). На основаніи вышесказаннаго и вслѣдствіе малаго числа наблюденій, сдѣланныхъ въ текучей водѣ и на

[1]) Напримѣръ такихъ, какія примѣнилъ г. Дорандтъ при своихъ замѣчательныхъ изслѣдованіяхъ подъ анемометрами (Метеорологическій Сборникъ И. Спб. Академіи, ред. Вильдъ. Т. 4 и 6).

[2]) Въ большой рѣкѣ, примѣняя малые предметы и прямой вѣсовой способъ опредѣленія сопротивленій (вертикальное коромысло, внизу въ водѣ предметъ, а на концѣ верхняго плеча—динамометръ или чашка вѣсовъ), можно съ большимъ удобствомъ опредѣлять относительныя сопротивленія разныхъ предметовъ; особенно же мнѣ кажется, что подобный способъ опредѣленія можетъ быть пригоденъ для изученія моделей вновь строющихся судовъ. Конечно, при этомъ скорости неизмѣнны, а мы увидимъ, что изученіе относительныхъ сопротивленій даетъ разныя величины при разныхъ скоростяхъ (одна модель можетъ быть выгоднѣе другой при малыхъ скоростяхъ, но хуже другой при большихъ скоростяхъ), а тѣмъ не менѣе большинство вопросовъ практики можетъ рѣшиться даже и наблюденіемъ съ одною скоростію. За указанный пріемъ говоритъ удобство, легкая сравнимость и легкость полученія точнаго результата.

вѣтру, я обращаю преимущественное вниманіе на такіе способы опредѣленія сопротивленій, въ которыхъ среда была неподвижна, а двигался въ ней предметъ, тѣмъ болѣе, что именно эти опредѣленія ближе всего касаются прямыхъ задачъ сопротивленія, а потому распредѣляю около соотвѣтственныхъ пріемовъ въ неподвижной средѣ тѣ немногія наблюденія, которыя считаю наиболѣе поучительными изъ числа сдѣланныхъ въ подвижной средѣ.

Главнаго вниманія заслуживаютъ, конечно, наблюденія, произведенныя въ столь большихъ массахъ воды, что ихъ можно считать безпредѣльными, то есть такія, для которыхъ близость стѣнокъ не оказываетъ вліянія на мѣру сопротивленія. Но такъ какъ и тѣ измѣренія, которыя произведены въ узкихъ сосудахъ, или при близости дна, или у поверхности, имѣютъ свой несомнѣнный интересъ, а иногда и не могутъ быть замѣнены другими (напр. наблюденіе скоростей паденія въ водѣ никогда еще не производилось въ большихъ массахъ, а всегда въ узкихъ сосудахъ), то и эти роды наблюденій не приходится выдѣлять въ особыя рубрики изъ числа наблюденій, производившихся въ большихъ массахъ среды, а потому наше дальнѣйшее дѣленіе способовъ наблюденія основывается исключительно на различіи пріемовъ и снарядовъ, служившихъ разнымъ наблюдателямъ для сообщенія тѣламъ поступательнаго движенія въ средѣ. При томъ многіе изъ указанныхъ далѣе способовъ наблюденія даютъ скорости движенія по существу своему неравномѣрныя, но онѣ тѣмъ не менѣе доставили важныя численныя данныя, касающіяся сопротивленія, особенно же первый способъ.

1) *Паденіе тѣлъ* въ водѣ и воздухѣ служило предметомъ изученія для многихъ наблюдателей и дало первыя, сколько либо точныя числа, относящіяся до сопротивленія; хотя вначалѣ паденія и получается скорость возрастающая, но только до извѣстнаго предѣла, тѣмъ скорѣе достигаемаго, чѣмъ меньше вѣсъ тѣла въ средѣ и чѣмъ больше мѣра сопротивленія, потому что равномѣрная скорость достигается именно при уравненіи двигающагося вѣса и сопротивленія.

2) *Качаніе тѣлъ* (маятниковъ, дисковъ и т. п.) въ воздухѣ и въ разныхъ другихъ жидкостяхъ исторически было весьма важнымъ способомъ изученія сопротивленія, хотя равномѣрной скорости здѣсь вовсе и быть не можетъ, потому что, начиная отъ крайней точки размаха, скорость растетъ до средины размаха и отъ одного колебанія до другого длины размаха (амплитуда качаній), а слѣдовательно и скорости въ срединѣ пути (вслѣдствіе равной длительности временъ колебаній или изохронизма) измѣняются, а именно уменьшаются. Кромѣ того, при качаніяхъ по дугамъ круга развиваются центробѣжныя силы, долженствующія вліять на результаты наблюденія. Начиная отъ Ньютона, предметъ этотъ изучался многими наблюдателями, но только Стоксъ въ недавнее время далъ полное толкованіе наблюденнымъ явленіямъ.

Какъ ни цѣнны данныя, полученныя изъ измѣренія колебаній, тѣмъ не менѣе мы не станемъ ихъ разсматривать въ дальнѣйшемъ изложеніи по двумъ причинамъ [1]). Во-первыхъ, потому, что при нихъ, какъ сказано выше, скорости неравномѣрны, а при перемѣнѣ скоростей, въ неустановившемся движеніи, нельзя ждать такой простоты вывода сопротивленія, какъ при наблюденіи движеній, совершающихся съ равномѣрною скоростію. Во-вторыхъ, въ качаніяхъ, наблюдавшихся до сихъ поръ, скорости, даже наибольшія (въ срединѣ размаха), малы, меньше чѣмъ въ большинствѣ другихъ способовъ, а потому сопротивленія, получаемыя при этихъ наблюденіяхъ, не могутъ быть сравниваемы съ наблюдаемыми по большинству другихъ способовъ, гдѣ стараются имѣть скорости близкія къ практически обыкновеннымъ при движеніи по водѣ и въ воздухѣ. Только при паденіи очень легкихъ тѣлъ могутъ съ удобствомъ наблюдаться сопротивленія, отвѣчающія малымъ скоростямъ, и этотъ пріемъ для этой послѣдней цѣли наилучшій, потому что тогда скоро достигаются почти постоянныя, малыя скорости, движеніе совершается по прямымъ линіямъ и т. п. Я думаю однако, что придетъ время, когда многіе тончайшіе вопросы сопротивленія вновь станутъ рѣшаться способомъ качаній, потому что онъ допускаетъ большую точность данныхъ.

3) *Полетъ артиллерійскихъ снарядовъ* служитъ, послѣ опытовъ Робинса и толкованій Эйлера, предметомъ многихъ изслѣдованій, касающихся сопротивленія воздуха. Хотя движеніе снарядовъ замедленное, но на краткой части пути среднюю скорость позволительно считать постоянною, и наблюдая убыль скоростей, выводить изъ того мѣру сопротивленія воздуха при большихъ скоростяхъ. Мы мало станемъ останавливаться и на этомъ пріемѣ опредѣленія сопротивленія, потому что онъ подробно и тщательно разбирается въ баллистикѣ, напримѣръ у Маевскаго, и еще потому, что здѣсь скорости крайне велики. Хотя получаемыя здѣсь числа сопротивленія поучительны для теоріи, но для обычной практики движеній въ водѣ и воздухѣ, гдѣ скоорсти гораздо меньше, они не могутъ служить прямо для пользы дѣла. Притомъ здѣсь, какъ и въ двухъ предшествующихъ пріемахъ, нѣтъ того разнообразія въ формахъ движущихся предметовъ (шары и продолговатые цилиндры), какое возможно въ двухъ послѣднихъ (5 и 6) изъ перечисляемыхъ нами способовъ, наиболѣе пригодныхъ для изученія сопротивленія тѣлъ разныхъ формъ.

4) *Пароходы и другія суда* служили предметомъ изученія для изслѣдованія законовъ сопротивленія. Большіе размѣры предме-

---

[1]) Если къ этимъ двумъ прибавить еще сложность и несовершенство расчета при ограниченности пространства, въ которомъ происходятъ колебанія, то, мнѣ кажется, все это достаточно оправдываетъ мое рѣшеніе не говорить далѣе объ опредѣленіи сопротивленій способами колебаній, тѣмъ болѣе, что на стр. 27 и 42 изложены важнѣйшія изъ первоначальныхъ данныхъ, сюда относящихся.

товъ, вмѣстѣ съ нѣкоторыми практическими удобствами наблюденій въ большомъ видѣ (напр. выводъ сопротивленія по расходу топлива, по индикаторной силѣ машины и по знанію потери работы на винтѣ, возможность прямыхъ динамометрическихъ опредѣленій при буксировкѣ и т. п.), дѣлаютъ наблюденія этого рода цѣнными по многочисленности и крупности цифръ. Но невозможность ручательства за точность многихъ входящихъ въ разсчетъ величинъ, одностороннее (если можно такъ выразиться) дѣйствіе сопротивляющейся среды, общее всѣмъ плавающимъ тѣламъ (по ихъ отношенію къ погруженнымъ тѣламъ), а особенно неопредѣленность внѣшнихъ формъ и малая возможность ихъ измѣненія, не позволяютъ примѣнять полученные результаты ни въ какихъ другихъ соображеніяхъ, кромѣ чисто практическихъ, до кораблей же относящихся. Поэтому лишь немногіе выводы (вліяніе скорости на мѣру сопротивленія), добытые этимъ путемъ, могутъ найти мѣсто въ изложеніи, имѣющемъ цѣлью общее, если угодно, теоретическое знакомство съ предметомъ, а не прямо практику морской архитектуры. Думаю однако, что наблюденія этого рода со временемъ, когда будутъ болѣе точны, чѣмъ нынѣ, могутъ принести чрезвычайно важные плоды для самой теоріи сопротивленія, особенно тогда, когда для опытовъ будутъ служить корабли совершенно опредѣленныхъ формъ [1]) и съ гладкими подводными поверхностями.

5) *Способъ кругообращенія*, въ первый разъ примѣненный Робинсомъ, служилъ затѣмъ (листъ 3 черт.) для добычи большинства данныхъ, примѣняемыхъ въ ученіи о сопротивленіи, потому что это единственный способъ, удобный для кабинетныхъ изслѣдованій, гдѣ однако легко измѣнять скорости и качество среды и опредѣлять мѣру сопротивленія по вѣсу гири, служащей двигателемъ, и мѣру скорости, по числу оборотовъ прибора и разстоянію предмета отъ оси вращенія. Главное достоинство его — легкость наблюденія и легкость достиженія равномѣрной скорости. Главные недостатки этого способа—большая поправка на треніе и развитіе центробѣжныхъ силъ. Эти два обстоятельства дѣлаютъ этотъ пріемъ менѣе цѣннымъ, чѣмъ слѣдующій, но не должно забыть, что вліяніе указанныхъ обстоятельствъ подлежитъ изученію, и полученный результатъ можетъ быть поправленъ въ этомъ отношеніи, хотя до сихъ поръ и мало обращали на этотъ предметъ вниманія. Реакціонное (перпендикулярное) сопро-

[1]) Напримѣръ хотя бы тѣхъ струйныхъ очертаній, какія предлагаетъ И. П. Алымовъ въ «Морскомъ Сборникѣ» 1879 г. Свойство струйной системы постройки состоитъ именно въ томъ, что данное горизонтальное (грузовое) и наибольшее поперечное (миделевое) сѣченія опредѣляютъ и всѣ остальныя сѣченія безъ всякаго произвола, а потому всѣ формы корабля строго опредѣляются двумя главными его сѣченіями. Было бы крайне интересно умножить число прямыхъ опредѣленій для кораблей именно этихъ очертаній, задаваясь строго опредѣленными главными сѣченіями.

тивленіе (стр. 14) изучалось почти исключительно этимъ способомъ, и здѣсь, въ примѣненіи къ устройству и изученію винтоваго двигательнаго органа или такого пріемника силы, какъ крылья вѣтряной мельницы, прямые результаты опытныхъ изслѣдованій получаютъ прямое практическое значеніе, потому что въ опытѣ и практикѣ одинаковымъ образомъ совершается круговращеніе. Не подлежитъ для меня сомнѣнію, что способъ круговращенія, какъ наиболѣе доступный для широкихъ и разнообразныхъ изслѣдованій сопротивленія, будетъ еще разработываться и доставитъ еще большой фактическій матеріалъ, какъ было то уже и до сихъ поръ. Поэтому этотъ способъ я подробно разбираю и съ своей стороны предлагаю нѣкоторыя въ немъ измѣненія.

6) *Способъ тяги* или прямолинейнаго движенія (въ жидкой средѣ тѣла испытуемой формы) грузомъ или динамометромъ даетъ прямѣе всѣхъ другихъ мѣру сопротивленія и позволяетъ проще всѣхъ другихъ пріемовъ получать точныя цифры, выражающія сопротивленіе, потому что грузъ или—еще лучше—динамометръ прямо, за малыми поправками, указываютъ сопротивленіе. Оттого то опыты французскихъ академиковъ, Бофуа и Фроуда, произведенные по этому способу, всегда служили важнѣйшею опорою для сужденія о сопротивленіи. Главное достоинство этого способа состоитъ затѣмъ въ легкой возможности измѣнять размѣры и форму тѣла, сопротивленіе котораго хотятъ опредѣлить, и въ близости примѣняемаго пріема къ тому, который встрѣчается на практикѣ. Основной недостатокъ этого способа—его дороговизна и сложность, зависящія отъ того, что путь для движенія тѣла надо имѣть длинный; иначе равномѣрной скорости не получится, а это удобно можно достигнуть только при громадныхъ и сложныхъ приспособленіяхъ. Не будь этой практически неудобной стороны дѣла, конечно, всѣ измѣренія сопротивленій дѣлались бы по этому способу, потому что онъ наболѣе всѣхъ отличается непосредственностію. Данныя, полученныя этимъ способомъ, будутъ приведены съ возможною полнотою въ этой главѣ.

Всего естественнѣе было бы ждать накопленія точныхъ данныхъ, касающихся сопротивленія, при помощи прямого *вѣсоваго способа*, подобнаго тому, который примѣнилъ уже Дю-Бюа (стр. 39) и какой примѣняется для опредѣленія скорости теченія рѣкъ; но до сихъ поръ пріемъ этотъ еще мало разработанъ, и если я упоминаю о немъ, то имѣю въ виду главнымъ образомъ обратить вниманіе послѣдующихъ наблюдателей на этотъ способъ. По той же причинѣ я описываю всѣ тѣ приспособленія, которыя, по моему мнѣнію, могутъ дать съ удобствомъ точную мѣру сопротивленія, примѣняя начала вѣсоваго коромысла, на одно плечо котораго дѣйствуетъ сопротивленіе, а на другое уравновѣшивающій грузъ. Здѣсь поправки ничтожны и существо способа соотвѣтствуетъ способу тяги, представляя передъ нимъ удобство легкой выполнимости и сравнительной дешевизны.

7) Всѣ предшествующіе способы даютъ цѣлое сопротивленіе испытуемаго, движущагося тѣла или тѣла, подверженнаго дѣйствію потока, а *трубка Пито* и ея различныя видоизмѣненія даютъ то давленіе, которое испытываетъ нѣкоторая часть тѣла. Дю-Бюа, какъ мы видѣли (стр. 33), примѣнилъ этотъ способъ и провѣрилъ его результатъ (стр. 39). Затѣмъ слѣдовали другіе. напр. Лагерхольмъ, Дюшменъ, Дарси, Дюпре. Хотя пріемы изслѣдованія здѣсь и многочисленны, но ихъ нельзя считать донынѣ достаточно разработанными и могущими давать точныя числа, а потому я посвящаю разбору этого способа лишь немного мѣста, да и то только по тому важному историческому значенію, которое имѣетъ этотъ пріемъ послѣ работъ Дю-Бюа.

Къ семи способамъ, какими собирался до сихъ поръ численный матеріалъ для изученія сопротивленія, конечно, современемъ прибавится еще много другихъ. Здѣсь же мы разберемъ накопившійся матеріалъ, собранный преимущественно тремя способами: паденія, круговращенія и тяги, и постараемся затѣмъ извлечь изъ данныхъ твердые численные выводы для сужденія о мѣрѣ сопротивленія, въ разныхъ случаяхъ встрѣчающагося.

Способъ опредѣленія сопротивленія по наблюденію времень паденія

Существо этого способа основано на знаніи законовъ свободнаго паденія, то есть паденія въ пустотѣ, а эти законы прямо по опыту знать нельзя, потому что опытъ производится въ воздухѣ, или другой, хотя бы и рѣдкой средѣ. Наблюденія давно показали, что скорость падающаго тѣла растетъ съ высотою, и что паденіе разныхъ тѣлъ въ обычныхъ условіяхъ совершается не одинаково быстро. Аристотель придумалъ законъ, державшійся до XVII столѣтія и учившій, что времена паденія обратно пропорціональны вѣсамъ, то есть, что тѣло въ n разъ тяжелѣйшее падаетъ въ n разъ скорѣе, или для прохожденія даннаго пути употребляетъ въ n разъ менѣе времени, чѣмъ другое тѣло въ n разъ болѣе его легкое. Десятки вѣковъ учили этому. Въ XVII столѣтіи профессоръ Галилей въ Пизанскомъ соборѣ, іезуитъ Ричіоли, съ Гримальди и Кассіани, на башнѣ Азинелли въ Болоньѣ, генуэзскій патрицій Баліани въ цитадели Савоны, и патеръ Аріага (этотъ проще всѣхъ — прямо заставлялъ падать съ высоты стола камень, пухъ и корку хлѣба) почти одновременно убѣдились опытомъ въ невѣрности начала Аристотеля. Истинные законы паденія, хотя и à priori'ныя, далъ въ 1638 г. Галилей — истинный основатель физико-механическихъ знаній, опирающихся на опытъ и умозрѣніе единовременно, берущихъ основу изъ опыта, развитіе отъ умозрѣнія и доказательство опять изъ опыта. Законы ускореннаго паденія, выведенные на основаніи допущенія постояннаго дѣй-

ствія тяжести во все время паденія, Галилей провѣрилъ опытами паденія по наклонной плоскости. Торичелли развилъ и отлично изложилъ законы Галилея, а Риччіоли въ 4-й книгѣ своей Almagest описалъ очень тщательные, направленные противъ Галилея, новые свои (1640—1650) опыты съ паденіемъ глиняныхъ шаровъ съ высоты 260 футовъ. Къ удивленію іезуитскаго ученаго, доказывавшаго библіею лживость Коперника—опытъ вполнѣ оправдалъ Галилея, хотя, надо это ясно видѣть, опытъ въ воздухѣ не можетъ въ строгомъ смыслѣ быть согласнымъ съ законами паденія, данными для пустоты и выведенными à priori—геометрическимъ путемъ. Риччіоли, Гримальди и Кассіани нашли, что времена паденій T, выраженныя въ терціяхъ ($\frac{1}{60}$ секунды), и проходимыя пространства H, выраженныя въ римскихъ футахъ, для глинянаго шара, вѣсящаго 8 унцевъ, суть [1]):

T=	50	100	150	200	250	260 терцій,
H=	10	40	90	160	250	280 футъ,

какъ и слѣдуетъ по законамъ Галилея, принявъ, что въ 50 терцій шаръ проходитъ 10 футъ, потому что, когда время увеличилось въ n разъ, проходимое пространство возросло въ n^2 разъ, какъ и слѣдовало по Галилею. Это утвердило законы, служащіе началомъ всѣхъ дальнѣйшихъ точныхъ механическихъ знаній. Только послѣ законовъ Галилея и Кеплера сталъ возможенъ Ньютонъ.

Галилеемъ данные, апріорные законы равномѣрно-ускореннаго движенія, или законы свободнаго паденія тѣлъ, какъ извѣстно, суть:

Путь отъ начала паденія (высота паденія) до истеченія T секундъ:

$$H=\frac{GT^2}{2}=\frac{V^2}{2G}=\frac{VT}{2}.$$

Время отъ начала паденія до прохожденія пути H:

$$T=\sqrt{\frac{2H}{G}}=\frac{2H}{V}=\frac{V}{G}.$$

Скорость на разстояніи H или чрезъ T сек. послѣ начала паденія:

$$V=GT=\sqrt{2GH}=\frac{2H}{T}.$$

Ускореніе (напряженіе) тяжести въ пустотѣ:

$$G=\frac{2H}{T^2}=\frac{V^2}{2H}=\frac{V}{T}.$$

[1]) Эти историчесаія подробности, касающіяся до галилеева открытія, взяты мною изъ книги Бенценберга (1804), о которой далѣе будетъ рѣчь.

Въ опытѣ опредѣляется лишь T и H — время и разстояніе. Основное дифференціальное равенство, связывающее ихъ, показываетъ, что приращеніе скорости $\left(\text{которая есть } \frac{dH}{dT}\right)$ въ теченіе времени зависитъ только отъ постоянной силы тяжести G, а потому оно есть:

$$G=\frac{d^2H}{dT^2},$$

откуда и вытекаетъ, чрезъ двукратное интегрированіе, такъ какъ при T=0 и H=0, что

$$H=G\frac{T^2}{2}.$$

Такъ какъ вѣсъ тѣла P (въ пустотѣ) измѣняется съ массою его m и съ напряженіемъ или ускореніемъ тяжести G, служащимъ мѣрою тяжести, то:

$$P = mG,$$

а потому основными равенствами могутъ служить слѣдующія:

$$P=m\frac{d^2H}{dT^2}$$

и

$$H=\frac{P}{2m}T^2.$$

Для ясности дальнѣйшихъ разсужденій должно имѣть въ виду, что масса даннаго тѣла неизмѣнна ни въ какихъ условіяхъ, а потому если вѣсъ даннаго тѣла мѣняется въ нѣкоторыхъ условіяхъ, значитъ мѣняется и дѣйствующее тогда ускореніе, и наоборотъ— съ перемѣною ускоренія измѣняется и вѣсъ. Поэтому значеніе напряженія тяжести для уровня моря:

$$G=9{,}78+0{,}053\ \mathrm{Sin}^2\varphi\ ^1),$$

гдѣ φ есть широта мѣста, отвѣчаетъ только дѣйствію тяжести на тѣла, падающія въ пустотѣ, такъ какъ падающее въ воздухѣ или другой средѣ тѣло теряетъ часть своего вѣса, а потому тогда дѣйствующее ускореніе тяжести будетъ меньше G.

Когда паденіе совершается въ жидкой средѣ, плотность которой=Δ, тогда *дѣйствующій* или *движущій вѣсъ* или вѣсъ тѣла въ жидкости, который обозначаемъ чрезъ p, уменьшится сравнительно съ вѣсомъ P въ пустотѣ на вѣсъ вытѣсненнаго объема жидкости, а вытѣсненный объемъ найдется, если мы знаемъ d

---

[1]) Это выраженіе справедливѣе для Россіи, чѣмъ общее выраженіе Сабина. На высотѣ z метровъ отъ уровня океана напряженіе тяжести=$G(1-0{,}00000031z)$. Подробности во многихъ сочиненіяхъ по физикѣ, астрономіи и механикѣ, напр. см. мое сочиненіе: «Объ упругости токовъ», гл. I, стр. 66.

плотность (вѣсъ куб. мѣры) падающаго тѣла, потому что объемъ тѣла $= \frac{P}{d}$. Слѣдовательно

$$p = P - \Delta \frac{P}{d} = P\left(1 - \frac{\Delta}{d}\right).$$

А потому при паденіи тѣла въ нѣкоторой жидкой средѣ напряженіе тяжести уменьшается во столько же, во сколько и вѣсъ тѣла. Это новое, для каждаго случая отдѣльное, значеніе напряженія тяжести означимъ чрезъ g и такъ какъ

$$m = \frac{P}{G} = \frac{p}{g},$$

то очевидно, что

$$g = \frac{p}{P} G = G\left(1 - \frac{\Delta}{d}\right) = \frac{p}{m}.$$

А потому, помимо всякаго сопротивленія, законъ паденія тѣлъ въ средѣ имѣющей вѣсъ, выразится тѣмъ, что ускореніе отъ тяжести здѣсь уменьшено, а потому произойдетъ что либо одно изъ трехъ: или $\Delta = d$, тогда не будетъ ни паденія, ни всплыванія; или Δ больше d, то есть тѣло легче, чѣмъ объемъ вытѣсненной жидкостии, тогда g будетъ отрицательная величина (п. ч. $\frac{\Delta}{d} > 1$) — тѣло будетъ всплывать, а находящееся на поверхности—будетъ плавать на ней, или же, наконецъ, d больше Δ и тогда $\frac{\Delta}{d}$ есть правильная дробь, меньшая единицы, а слѣдовательно g будетъ меньше G, и тогда произойдетъ паденіе, но болѣе медленнѣе, чѣмъ въ пустотѣ. Этотъ одинъ послѣдній случай мы и станемъ здѣсь разсматривать, потому что онъ одинъ до сихъ поръ былъ подвергнутъ изученію [1]).

Итакъ, еслибы паденіе совершалось въ средѣ, имѣющей вѣсъ, но непредставляющей сопротивленія, то оно было бы *равномѣрно ускореннымъ*, какъ и свободное паденіе тѣлъ, только въ данное время T проходимыя отъ начала паденія пространства H_1 были бы меньше, чѣмъ при свободномъ паденіи, потому что дѣйствующее напряженіе тяжести было бы иное, а потому тогда законъ паденія былъ бы

$$H_1 = g\frac{T^2}{2} = G\left(1 - \frac{\Delta}{d}\right)\frac{T^2}{2} = G\frac{p}{P}\frac{T^2}{2}.$$

[1]) До сихъ поръ нѣтъ точныхъ наблюденій надъ временами всплываній легкихъ тѣлъ въ водѣ или аэростатовъ въ воздухѣ. Предметъ этотъ однако подлежитъ точному измѣренію и достоинъ изслѣдованія, особенно въ виду непосредственнаго примѣненія къ воздухоплаванію. Мнѣ кажется, по сдѣланнымъ мною попыткамъ, особенно удобнымъ и интереснымъ изслѣдованіе всплыванія маслообразныхъ капель въ водѣ и др. жидкостяхъ. Полезно также собраніе точныхъ данныхъ для аэростатическихъ поднятій. Законы всплыванія въ сопротивляющейся средѣ тѣ же, что и законы паденія.

Но паденіе тѣлъ въ жидкой средѣ совершается медленнѣе, чѣмъ свободное паденіе, не только потому, что уменьшается вѣсъ на вѣсъ вытѣсненной жидкости, но еще и потому, что дѣйствуетъ сопротивленіе среды, направленное въ сторону, противоположную съ направленіемъ движенія. Если назовемъ сопротивленіе чрезъ R, то зная, что сопротивленіе каждаго тѣла въ каждой средѣ возрастаетъ вмѣстѣ со скоростію, станетъ очевиднымъ, что наступитъ, при нѣкоторой скорости c, такое сопротивленіе, что оно будетъ равно вѣсу тѣла

$$R = p,$$

а тогда ускоренія не будетъ, и слѣдовательно прекратится приростъ скорости и движеніе *станетъ равномѣрнымъ*. Это показываетъ, что скорость паденія всякаго тѣла въ каждой жидкости по истеченіи нѣкотораго времени приближается къ постоянной c [1]); зависящей отъ движущаго вѣса тѣла p и отъ мѣры его сопротивленія $k\Delta M$. Это есть главная особенность паденія тѣлъ въ жидкостяхъ. На ней основано устройство парашюта. Легко доказать, что постоянная скорость достигается только въ безконечно большое время, если имѣть въ виду абсолютную точность наблюденія [2]); но, принимая во вниманіе, что въ дѣйствительныхъ опытныхъ изслѣдованіяхъ неизбѣжна нѣкоторая постоянная погрѣшность въ опредѣленіи высотъ паденія и во временахъ, а слѣдовательно и въ скоростяхъ, станетъ очевиднымъ, что постоянная скорость c достигается тѣмъ быстрѣе (при прочихъ равныхъ условіяхъ), чѣмъ меньше движущій вѣсъ, чѣмъ больше сопротивленіе тѣла $k\Delta M$ и чѣмъ меньше c.

Въ самомъ дѣлѣ, между скоростью v и временемъ t или пространствомъ h, протекшими до ея достиженія (считая начальную скорость $= 0$), существуютъ, при допущеніи (хотя бы условномъ) пропорціональности съ v^2, слѣдующія отношенія:

$$\frac{2gt}{2{,}3026c} = \log \frac{c+v}{c-v}$$ [3])

и

$$\frac{2gh}{2{,}3026c^2} = \log \frac{c^2}{c^2-v^2}$$ [4])

---

[1]) Эта постоянная скорость означена въ приложеніи 2-мъ, стр. 19 — 26, буквою a. Вводя обозначеніе c, я имѣю въ виду удобство чтенія и желаю выразить понятіе постоянства—*constant*.

[2]) Доказательство видно изъ формулы A, помѣщенной въ приложеніи, стр. 20, потому что значеніе числителя становится равнымъ значенію знаменателя только при безконечномъ t.

[3]) См. приложеніе 2-е, стр. 20 уравненіе (10), гдѣ подъ знакомъ lg подразумѣвается непэровъ логарифмъ, а здѣсь—обыкновенный, и гдѣ a равно нашему c=предѣльной скорости.

[4]) Приложеніе 2-е, стр. 21, уравненіе C. Предшествующія замѣчанія, а наше h равно x въ приложеніи.

Вопросъ разрѣшится, если мы опредѣлимъ то время t_c, протекшее отъ начала паденія, или ту высоту h_c, при которыхъ разность $c-v$ будетъ равна погрѣшности, *возможной* въ опредѣленіи скоростей. Назовемъ ее чрезъ $\delta(v)$. Абсолютная ея величина зависитъ, конечно, отъ возможной погрѣшности $\delta(t)$ въ опредѣленіи разности временъ t_1 и t_2 прохожденія тѣла чрезъ точки пути h_1 и h_2 и отъ погрѣшности $\delta(h)$ въ опредѣленіи разности этихъ высотъ h_1-h_2. Повтореніе опыта, совершенство пріемовъ и т. п. дадутъ прямо наибольшія возможныя значенія $\delta(t)$ и $\delta(h)$ для каждаго ряда опытовъ. А такъ какъ $v=\frac{h_1-h_2}{t_1-t_2}$, то $\delta(v)=\frac{\delta(h)}{(t_1-t_2)}+\frac{(h_1-h_2)\delta(t)}{(t_1-t_2)^2}$; слѣдовательно, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, наибольшее значеніе $\delta(v)$ можно считать за величину извѣстную. Требуется найти ту высоту h_c и то время t_c, при которыхъ $c-v=\delta(v)$, что и возможно при помощи вышеприведенныхъ двухъ уравненій, если въ нихъ принять, какъ и можно сдѣлать, для нашего теперешняго разсчета, $c+v=2c=2v$, потому что при этомъ, когда $c-v$ мало, сумма $c+v$ мало отличается отъ $2c$ или отъ $2v$. Замѣчая, что $g=G\frac{p}{P}=9{,}8\ \frac{p}{P}$, получаемъ значенія t_c и h_c, при которыхъ достигается предѣльная окорость c съ точностью $\delta(v)$:

$$(a)\ \ldots\ t_c=\frac{2{,}303c.}{2g}\log\frac{2c}{\delta(v)}=0{,}1175\ \frac{p}{P}\,c\left[\log 2c-\log\delta(v)\right]$$

$$(b)\ \ldots\ h_c=\frac{2{,}303.c^2}{2g}\log\frac{c}{2\delta(v)}=0{,}1175\ \frac{P}{p}c^2\left[\log\frac{c}{2}-\log\delta(v)\right]$$

Пусть, напримѣръ, $\frac{P}{p}=40$, и пусть два опредѣленія скорости на нѣкоторомъ значительномъ разстояніи дали послѣдовательно числа 0,21 и 0,20 метра. Такъ какъ скорость въ дѣйствительности должна увеличиваться, а она вышла уменьшающеюся, то изъ этого заключаемъ, во-первыхъ, что погрѣшность въ опредѣленіи скоростей не меньше 0,01, и, во-вторыхъ, что предѣльная скорость c близка къ 0,21, а потому, полагая $c=0{,}21$ и $\delta(v)=0{,}01$, мы получимъ $t_c=1''{,}6$ и $h_c=0{,}^m21$, а это показываетъ, что предѣльная скорость c достигается съ точностью до $\frac{1}{100}$ уже чрезъ $1^2/_3$ секунды и на разстояніи $^1/_4$ метра отъ начала паденія. Изъ формулъ (a) и (b), которыя составлены (надо не забыть это) въ предположеніи $R=k\Delta Mv^2$ [1]), становится очевиднымъ, что предѣльная

[1]) Если сопротивленіе пропорціонально не v^2, а v, то предѣльная скорость достигается гораздо медленнѣе, а именно съ погрѣшностью $\delta(v)$ она достигается во время равное $\frac{c}{g}ln\frac{\delta(v)}{c}$, вмѣсто времени $\frac{c}{2g}ln\frac{2c}{\delta(v)}$, какъ въ случаѣ вышеразсмотрѣнномъ (v^2). Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, если сопротивленіе пропорціонально v^3, то съ точностью 0,01 предѣльная скорость достигается

скорость достигается тѣмъ скорѣе, чѣмъ меньше c и чѣмъ меньше отношеніе $\frac{P}{p}$ между вѣсомъ въ пустотѣ къ вѣсу въ жидкости, что́ мы и желали доказать ради того, чтобы въ каждомъ частномъ случаѣ можно было знать то разстояніе h_c, отъ котораго, въ предѣлѣ возможныхъ погрѣшностей, скорость можно считать уже за предѣльную. Если въ разстояніи большемъ, чѣмъ h_c отъ начала паденія, будетъ опредѣлена (лучше, конечно, если опредѣленіе будетъ еще повторено и чрезъ нѣкоторое разстояніе окажется неизмѣненнымъ) скорость паденія, то ее поэтому можно считать за предѣльную, то-есть за равную c. А если предѣльная скорость c извѣстна изъ наблюденія, хотя бы съ погрѣшностью $\partial(v)$, тогда значеніе k опредѣлится съ крайнею простотою, потому что:

$$\mathrm{p} = \mathrm{k}\Delta\mathrm{M}c^2,$$

а потому:

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{p}}{\Delta\mathrm{M}c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Въ этомъ опредѣленіи k, вслѣдствіе неточности $\partial(v)$ значенія c, будетъ погрѣшность равная

$$\partial(\mathrm{k}) = \frac{2\mathrm{k}}{c}\partial(\mathrm{v}).$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial(\mathrm{k})}{\mathrm{k}} = 2\,\frac{\partial(\mathrm{v})}{c};$$

то-есть относительная погрѣшность опредѣленія k вдвое превышаетъ относительную погрѣшность предѣльной скорости; слѣдовательно, если въ опредѣленіи предѣльной скорости мы дѣлаемъ погрѣшность въ сотую долю, значеніе k опредѣлится по (c) съ точностью до пятидесятой доли значенія k. Такъ какъ въ практикѣ, если уже достигнута скорость близкая къ c, можно опредѣлить равномѣрную скорость съ бо́льшею степенью точности (стоитъ увеличить предѣлъ разстояній, между которыми опредѣляется скорость), то опредѣленіе k этимъ способомъ можетъ быть очень точно, если только постоянная скорость достигается въ предѣлахъ возможной точности наблюденія. А потому излагаемый способъ и формула (c) даютъ надежный пріемъ опредѣленія k, тѣмъ

чрезъ $1^2/_3$ секунды, а если R пропорціонально v, то по прошествіи 2,6 секунды. Для этого послѣдняго случая, разсматриваемаго далѣе по отношенію зависимости t, h и c, зависимость t отъ v выражается равенствомъ $t = \frac{c}{g}\ln\frac{c}{c-v}$, берущимъ начало изъ условія, что $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k\Delta\mathrm{M}v}{m}$ или, что́ все равно, $\frac{dt}{dv} = \frac{c}{gc-gv}$, потому что тогда $p = mg = k\Delta\mathrm{M}c$.

болѣе, что при этомъ движеніе установилось, или *скорость постоянна*, и слѣдовательно k относится съ увѣренностью къ данному тѣлу, данной жидкости и опредѣленной скорости. Иными словами, примѣняя выраженіе (c), намъ нѣтъ нужды знать точный законъ измѣненія сопротивленія съ перемѣною скорости, и мы все же будемъ знать сопротивленіе, ибо оно $=$ вѣсу p. Въ пространствѣ же отъ $h=0$ до h_c скорость растетъ, измѣняется, слѣдовательно, для вычисленія k изъ наблюденій въ этомъ пространствѣ необходимо предварительно знать законъ измѣненія сопротивленія со скоростью—иначе невозможно интегрированіе, и если значеніе k перемѣнно со скоростью, его нельзя, какъ то дѣлается обыкновенно, признавать за постоянную независящую отъ v, t и h. Пусть, напримѣръ, окажется, что сопротивленіе растетъ не пропорціонально v^2, а пропорціонально нѣкоторой $f(v)$, то-есть $\mathrm{R}=\Delta \mathrm{M} f(v)$; все же, наблюдая предѣльную скорость c для даннаго тѣла при вѣсѣ (въ жидкости) p, мы найдемъ $p_1=\Delta \mathrm{M} f(c_1)$, а при другомъ вѣсѣ $p_2=\Delta \mathrm{M} f(c_2)$ и т. д., откуда опредѣлимъ значенія $f(v)$ при разныхъ скоростяхъ, то-есть узнаемъ видъ и природу $f(v)$. Если, напримѣръ, $f(v)=kv+k_1v^2$, то изъ наблюденій выведется значеніе k и k_1 съ опредѣленною степенью точности. Совершенно иное будетъ, если скорость непостоянна, то-есть наблюдаются величины меньшія t_c и h_c. Тогда увѣренность исчезаетъ. Но иногда нельзя этого практически избѣгнуть, потому что нѣтъ въ распоряженіи достаточныхъ разстояній и временъ паденія, чтобы достичь хоть приближенно постоянной скорости. Такъ напримѣръ случай паденія тяжелаго тѣла въ воздухѣ, когда движеніе, при обычныхъ высотахъ, съ которыхъ производятъ опытъ, еще далеко не становится равномѣрнымъ.

Изъ сказаннаго видно, что для того, чтобы *изъ наблюденія* временъ t и разстояній h сдѣлать выводъ о мѣрѣ сопротивленія k тѣла данной формы, есть два способа: 1) наблюденіе времени t_0 начала паденія и времени t_1, когда тѣло прошло отъ начала паденія разстояніе h, причемъ сопротивленіе выразится функціею отъ ускоренія тяжести g, отъ времени t, которое $=t_1-t_0$, и отъ высоты h; 2) наблюденіе окончательной или предѣльной скорости c, достигаемой, если не абсолютно, то съ нѣкоторою точностію, по прохожденіи разстоянія h_c отъ начала паденія, причемъ необходимо наблюсти h_2, h_3, h_4... и соотвѣтственныя времена t_2, t_3, t_4.... и увѣриться, что скорости постоянны, то есть, что въ предѣлахъ точности наблюденія $\frac{h_2-h_3}{t_2-t_3}=\frac{h_3-h_4}{t_3-t_4}=\ldots\ldots=c$.

Первый способъ должно считать общимъ, мы его и разберемъ далѣе, а второй страдаетъ неувѣренностію только тогда, когда нѣтъ убѣжденія въ достиженіи съ точностію $\delta(v)$ предѣльной скорости c, но если найденныя въ опытѣ скорости v_2, v_3.... мало отличаются между собою, то они близки къ c, но будутъ мень-

ше c и дадутъ по формулѣ (c) значеніе k больше дѣйствительнаго, а отнюдь не меньше дѣйствительности.

Если опытъ, тѣмъ или другимъ путемъ произведенный, покажетъ, что при разныхъ скоростяхъ получается различное k, это будетъ значить, въ сущности, что сопротивленіе пропорціонально не квадрату, а иной степени. При томъ если k станетъ возрастать съ возрастаніемъ скорости, это будетъ значить, что сопротивленіе растетъ быстрѣе, чѣмъ квадраты скоростей, а если k окажется уменьшающимся со скоростью, то оно зависитъ отъ первой степени скорости или отъ функціи $av+bv^2$ или отъ v_n, гдѣ $n>1<2$, или вообще отъ нѣкоторой функціи $f(v)$, а не отъ v^2. Такъ, зная k въ предположеніи I-й формулы, по наблюденію можно узнать и мѣру, и законы сопротивленія, а слѣдовательно и всякій другой *условный* способъ выраженія сопротивленій приведетъ къ пониманію существа дѣла. Поэтому мы разсмотримъ въ примѣненіи къ ускоренному движенію или къ началу паденія примѣнимость I-й формулы, да еще, для примѣра, разберемъ примѣнимость предположенія, что сопротивленіе пропорціонально первой степени скорости.

Начальное разсужденіе, дающее рѣшеніе условій паденія тѣлъ въ сопротивляющейся средѣ, можетъ быть, мнѣ кажется, проще всего выражено, исходя изъ того положенія механики, что мѣрою силъ служитъ сообщаемое ими *ускореніе*, которое есть $\frac{d^2h}{dt^2}$ или вторая производная отъ проходимаго пространства h по времени t, или оно равно $\frac{dv}{dt}$ = измѣненію (первой производной) скорости v [1]) по времени t.

Ускореніе при паденіи въ жидкости будетъ очевидно равно ускоренію g отъ дѣйствія движущаго вѣса p безъ ускоренія, зависящаго отъ силы сопротивленія. Но если ускореніе отъ силы тяжести въ жидкости дѣйствующее $g=\frac{p}{m}$, гдѣ m масса (которая найдется изъ вѣса въ пустотѣ P, дѣленнаго на ускореніе тяжести въ пустотѣ G=9,8... т. е. $m=\frac{P}{g}$), то и ускореніе, относящееся къ сопротивленію=самому сопротивленію (а оно выражается вѣсомъ, какъ сказано на 1-й стр.) R, дѣленному на массу m. А потому

$$g=\frac{R}{m}=\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{dv}{dt}.$$

Подставляя на мѣсто R его условное значеніе $R=k\Delta Mv^2$ (или какое другое, напр. съ v, а не съ v^2) и потомъ помножая обѣ

[1]) Которая сама есть измѣненіе или первая производная проходимаго пространства h по времени t или $v=\frac{dh}{dt}$.

части на m и замѣчая, что $mg = p$, получаемъ первое, основное уравненіе

$$p - k\Delta M v^2 = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2h}{dt^2}.$$

Такъ какъ $v = \frac{dh}{dt}$, а $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2}$, то получается диффиренціональное уравненіе, выражающее вполнѣ зависимость h отъ t, а именно, принимая во вниманіе, что при достиженіи предѣльной скорости c, ускореніе=0, то есть $p - k\Delta Mc^2 = 0$ [1]), откуда

$$k\Delta M = \frac{p}{c^2},$$

имѣемъ:

$$p - \frac{p}{c^2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{d^2h}{dt^2}m,$$

или, такъ какъ $\frac{p}{m} = g$, то лучше:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = g - \frac{g}{c^2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2.$$

Двукратное интегрированіе въ предѣлахъ отъ $h = 0$ до нѣкотораго опредѣленнаго, конечнаго h доставляетъ [2]), имѣя въ виду что при $h=0$, $v=0$ и $t=0$, слѣдующую явную зависимость между c, h и t:

$$(A)\ldots h = \frac{c^2}{g}\ln\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right) = 2{,}302\,\frac{c^2}{g}\log\left(\frac{e^{\alpha}}{2}+\frac{1}{2e^{\alpha}}\right)$$

гдѣ ln есть знакъ натуральныхъ (неперовыхъ) логарифмовъ, log знакъ обыкновенныхъ (бригговыхъ или десятичныхъ) логарифмовъ, гдѣ затѣмъ основаніе неперовыхъ логарифмовъ e=2,718,

$$g = G\frac{p}{P} = \text{ускореніе тяжести}\ \frac{\text{вѣсъ въ жидкости}}{\text{вѣсъ въ пустотѣ}},$$

$$c^2 = \frac{k\Delta M}{p},$$

$$\alpha = \frac{gt}{c} = G\frac{p}{P}\ t\ \sqrt{\frac{k\Delta M}{p}}.$$

---

[1]) Это тождественно съ (*c*) и служитъ какъ бы ему доказательствомъ.

[2]) Самое интегрированіе дано во 2-мъ приложеніи, стр. 20 и 21. Вся разность формулъ зависитъ отъ разности обозначеній. То, что тамъ означено чрезъ a, здѣсь выражено c, а то, что тамъ обозначено чрезъ g_1, здѣсь просто названо g, то же, что въ приложеніи названо g, то здѣсь обозначено G, и оно то = 9,8... метровъ. Кромѣ того, здѣсь вмѣсто отрицательной степени прямо написана дробь и вмѣсто непэрова логарифма взятъ уже обыкновенный, зная, что непэровъ логарифмъ lnx=2,302 $\log x$.

Такъ какъ выраженіе (A) можетъ быть представлено въ формѣ:

$$gh = c^2 \ln\left(\frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}{2}\right),$$

то очевидно, что перемѣнными служатъ: gh, gt и c, то есть, что существуетъ зависимость между окончательною, постоянною скоростью c и наблюдаемыми величинами gh и gt. Конечно, наблюдаются въ указанныхъ условіяхъ только h и t, но g дается условіями опыта, потому что равно $G\frac{p}{P} = 9{,}82\,\frac{\text{вѣсъ въ жидкости}}{\text{вѣсъ въ пустотѣ}}$, а потому формула (A) даетъ, собственно говоря, неизвѣстную предѣльную скорость c по извѣстнымъ t, h и g, а когда c извѣстна—величина k опредѣлится изъ равенства (c). Отсюда видно: 1) каждое тѣло по отношенію къ данной жидкости характеризуется тою предѣльною скоростію, которую оно можетъ въ ней достигать, и 2) что, опредѣляя для даннаго тѣла t, h и g и наблюдая для него же предѣльную скорость c, можно испытать справедливость равенства (A) и слѣдовательно предположеніе I, которое заключается въ (A). Чтобы облегчить разсчетъ и розысканіе связи между gh, gt и c, приводимъ прилагаемую таблицу, по которой найдется при данныхъ gt и c значеніе gh *въ предположеніи сопротивленія пропорціональнаго квадрату скорости*, принимая за t время отъ начала паденія до разстоянія h въ секундахъ и выражая g, h и c въ метрахъ.

Значеніямъ gt	Паденіе происходитъ въ пустотѣ [1])	Если паденіе происходитъ въ средѣ совротивляющейся пропорціонально v^2, и если предѣльная скорость c равна					
		$c=$ 50	40	30	20	10	1 метру.
10	$gh=$ 50	$gh=$ 49,7	49,5	49,1	48,0	43,4	9,307
20	200	194,9	192,2	186,7	173,5	132,5	19,307
30	450	424,4	413,2	390,3	342,2	230,9	29,307
40	800	726,9	693,9	636,6	530,0	330,7	39,307
50	1250	1084,5	1017,2	907,7	725,5	430,5	49,307

Такъ напримѣръ, если для даннаго тѣла, котораго вѣсъ въ пустотѣ P=2 кило, а въ жидкости вѣсъ p=1,5 кило, наблюдено было тамъ, гдѣ G=9,82, что по истеченіи 5,506 секунды оно прошло 71,95 метровъ отъ начала паденія, то изъ этого слѣдуетъ, что gt близко къ 40, gh къ 530, а потому предѣльная скорость этого тѣла близка къ 20 метрамъ, какъ показываетъ таблица. Если c=20, то зная $p\Delta$ и M (поперечное сѣченіе) по формулѣ (c) узнаемъ k. Для промежуточныхъ значеній hg, gt и c, непри-

[1]) Тогда $gh = \frac{(gt)^2}{2}$, потому что $h = \frac{gt^2}{2}$.

веденныхъ въ таблицѣ, можно примѣнять интерполированіе или пользоваться приближенною формулою (В), далѣе приводимою. Можно однако и прямо находить по опытнымъ даннымъ c или вообще сопротивленіе, пользуясь соображеніями, которыя излагаются вслѣдъ за симъ и которыми далѣе я часто пользуюсь.

Формулу (А) можно представить въ слѣдующемъ видѣ, замѣнивъ въ ней c^2 его значеніемъ, взятымъ изъ равенства $\alpha=\frac{gt}{c}$:

$$\frac{gh}{(gt)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\ln\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}-=y.$$

Во второй части этого равенства находится только одна перемѣнная α, слѣдовательно численная величина y опредѣляется вполнѣ, съ одной стороны, величиною α, а съ другой—результатомъ наблюденія (выражается дробью $\frac{gh}{(gt)^2}$ или $\frac{h}{gt^2}$), а потому для каждаго наблюденія y извѣстно, а изъ него найдется α, а слѣдовательно и c, а потомъ и k. Поэтому разсчетъ сводится на слѣдующее: по данному численному значенію $\frac{gh}{(gt)^2}$ или y слѣдуетъ найти соотвѣтственное значеніе α. Это даетъ прилагаемая далѣе таблица. Если же α извѣстна, будетъ извѣстно и c, потому что $c=\frac{gt}{\alpha}$, а когда c извѣстно — легко узнать и k, по уравненію $p=k\Delta Mc^2$, гдѣ p, Δ и M суть прямыя данныя опыта. Слѣдовательно надо имѣть значенія α и соотвѣтствующія имъ значенія функціи $\frac{1}{\alpha^2}ln\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}-=y$, тогда изъ опытныхъ данныхъ легко извлечь значеніе c и k, характеризующихъ сопротивленіе падающаго тѣла. Приводя таблицу соотвѣтственныхъ значеній α и y, замѣтимъ, что для пустоты c безконечно велико, слѣдовательно $\alpha=0$, а тогда $y=\frac{1}{2}$, то есть $\frac{gh}{(gt)^2}=\frac{1}{2}$ или (что все равно) $h=\frac{gt^2}{2}$, что и выражаетъ законъ паденія въ пустотѣ. Кривая, выражающая измѣненіе y съ перемѣною α, имѣетъ нѣкоторое сходство съ цѣпною линіею и можетъ быть названа *кадоидою* или *линіею паденія* въ средѣ. Опишемъ ея общую форму, считая α абсциссами и отлагая y ординатами. Кадоида или кривая паденія [1]) пересѣкаетъ ось ординатъ при значеніи $\frac{1}{2}$, то есть при $\alpha=0$ величина $y=0{,}5$. Это есть наибольшее значеніе y. Начиная отсюда, значеніе y все время убываетъ по мѣрѣ возрастанія α. Начиная отъ $\alpha=0$, кривая идетъ далѣе, представляя вогнутость, обращенную къ началу координатъ. Но при нѣкоторомъ значеніи (около $\alpha=1{,}2$) абсциссы

[1]) Мы разбираемъ только ту часть кадоиды, которая имѣетъ физическое значеніе при паденіи, то есть отвѣчаетъ положительнымъ абсциссамъ. При всплываніи g и c отрицательны, а потому α также положительная.

изгибъ кривой мѣняется: ординаты продолжаютъ все время уменьшаться по мѣрѣ возрастанія α, но кривая обращена къ началу координатъ выпуклостью и такимъ образомъ кривая становится асимптодическою, причемъ ось абсциссъ служитъ асимптодою, такъ что при большихъ значеніяхъ α значенія y приближаются къ нулю. Очевидно. что при большихъ α величина y мѣняется очень мало, а потому тогда нельзя пользоваться таблицами, опредѣляющими зависимость y отъ α. Но тогда есть возможность очень просто вести весь разсчетъ, потому что тогда (при большихъ α) членъ $e^{-\alpha}$, стоящій подъ знакомъ логарифма, ничтожно малъ сравнительно съ членомъ e^{α} и тогда вмѣсто y можно взять $\frac{1}{\alpha^2}\ln\frac{e^{\alpha}}{2}$, а это выраженіе равно $\frac{1}{\alpha}-\frac{\ln 2}{\alpha^2}$, а потому тогда весь разсчетъ простъ. какъ мы и покажемъ далѣе.

Поэтому мы приводимъ въ прилагаемой таблицѣ значенія y и $log\ y$ только для малыхъ α. Особый интересъ имѣютъ именно только эти значенія, потому что $\alpha=\frac{gt}{c}$, а при паденіи въ воздухѣ тяжелыхъ тѣлъ предѣльныя скорости c велики, времена же t малы [1]), а потому α мало. При паденіи въ водѣ, напротивъ того, обыкновенно α велико, потому что c мало, а потому наблюдаемое чрезъ нѣкоторое разстояніе h значеніе t велико. Если $\alpha=4$, то $e^{\alpha}=54{,}60$, а $e^{-\alpha}=0{,}02$, а потому при большемъ значеніи α и при обычной точности опредѣленій t, когда можно подозрѣвать погрѣшность равную $0{,}001\ t$, можно уже пренебрегать значеніемъ числа $e^{-\alpha}$.

Приводимъ поэтому значенія ординатъ кадоиды или y и логарифмы [2]) ихъ только для значеній α отъ $\alpha=0$ до $\alpha=4$ чрезъ каждую десятую долю, и только для яснаго понятія о кривой приводимъ величины y до величины $\alpha=10$, но тогда только чрезъ каждую единицу. Значеніе ординатъ для α бо́льшаго, чѣмъ $\alpha=10$, такъ малы, напр. $\alpha=100$, $y=0{,}00993$, и измѣняются такъ послѣдовательно, притомъ тогда $e^{-\alpha}$ столь ничтожно предъ e^{α}, что ихъ вовсе нѣтъ нужды приводить.

---

[1]) Нельзя дѣлать наблюденій при большихъ t — потому что въ опытахъ нельзя располагать большими высотами h, которыя тогда должны получиться. Паденіе тѣлъ съ аэростатовъ однако могло бы восполнить этотъ недостатокъ.

[2]) При помощи логарифмовъ y во многихъ случаяхъ удобнѣе находить промежуточныя значенія α.

Значеніе координатъ кадоиды, которой уравненіе есть:

$$y=\frac{1}{\alpha^2}\ln\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$$

		Разность.		Разность.
$\alpha=0,0$	$y=0,50000$		$\log y=0,69897-1$	
		— 84		— 74
0,1	0,49916		0,69823—1	
		— 245		— 213
0,2	0,49671		0,69610—1	
		— 404		— 354
0,3	0,49267		0,69256—1	
		— 546		— 485
0,4	0,48721		0,68771—1	
		— 675		— 605
0,5	0,48046		0,68166—1	
		— 786		— 717
0,6	0,47260		0,67449—1	
		— 878		— 814
0,7	0,46382		0,66635—1	
		— 952		— 900
0,8	0,45430		0,65735—1	
		—1006		— 974
0,9	0,44424		0,64761—1	
		—1046		—1034
1,0	0,43378		0,63727—1	
		—1069		—1084
1,1	0,42309		0,62643—1	
		—1081		—1123
1,2	0,41228		0,61520—1	
		—1080		—1154
1,3	0,40148		0,60366—1	
		—1073		—1176
1,4	0,39075		0,59190—1	
		—1055		—1189
1,5	0,38020		0,58001—1	
		—1035		—1199
1,6	0,36985		0,56802—1	
		—1010		—1202
1,7	0,35975		0,55600—1	
		— 981		—1201
1,8	0,34994		0,54399—1	
		— 951		—1196
1,9	0,34043		0,53203—1	
		— 918		—1187
2,0	0,33125		0,52016—1	
		— 886		—1178
2,1	0,32239		0,50838—1	
		— 854		—1165

		Разность.		Разность.
		— 854		—1165
α=2,2	y=0,31385		log y=0,49673—1	
		— 821		—1151
2,3	0,30564		0,48522—1	
		— 789		—1137
2,4	0,29775		0,47385—1	
		— 758		—1120
2,5	0,29017		0,46265—1	
		— 728		—1103
2,6	0,28289		0,45162—1	
		— 698		—1086
2,7	0,27591		0,44076—1	
		— 671		—1068
2,8	0,26920		0,43008—1	
		— 643		—1051
2,9	0,26277		0,41957—1	
		— 617		—1033
3,0	0,25660		0,40924—1	
		— 593		—1015
3,1	0,25067		0,39909—1	
		— 570		— 997
3,2	0,24497		0,38912—1	
		— 546		— 980
3,3	0,23951		0,37932—1	
		— 526		— 963
3,4	0,23425		0,36969—1	
		— 504		— 947
3,5	0,22921		0,36022—1	
		— 486		— 929
3,6	0,22435		0,35093—1	
		— 467		— 913
3,7	0,21968		0,34180—1	
		— 449		— 897
3,8	0,21519		0,33283—1	
		— 432		— 882
3,9	0,21087		0,32401—1	
		— 418		— 867
4,0	0,20669		0,31534—1	

		Разность.		Разность.
		— 662		— 247
α=1	y=0,4338		α=6 y=0,1474	
		—1025		— 187
2	0,3313		7 0,1287	
		— 747		— 145
3	0,2566		8 0,1142	
		— 499		— 117
4	0,2067		9 0,1025	
		— 346		— 94
5	0,1721		10 0,0931	
		— 247		— 79

Такъ какъ при паденіи e^{α} всегда болѣе единицы (потому что $\frac{gt}{c}>0$), то членъ e^{α} будетъ больше вліять на результатъ, чѣмъ $e^{-\alpha}$, которое будетъ всегда меньше единицы и слѣдовательно меньше e^{α}, а потому для приближеннаго значенія функціи паденія найдемъ сперва (по предшествующимъ способамъ разсчета или прямо по опыту) приближенное значеніе c_1 и подставимъ его въ наше основное уравненіе только для опредѣленія $e^{-\alpha}$. Величина эта будетъ тогда извѣстною. Назовемъ ее чрезъ N.

$$N=e^{-\alpha}=\frac{1}{e^{\alpha}},\ \text{гдѣ}\ \alpha=\frac{gt}{c}.$$

Тогда основное уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{gh}{c^2}=\ln\left[\frac{e^{\frac{gt}{c}}+N}{2}\right]=\ln e^{\frac{gt}{c}}+\ln(1+N^2)-\ln 2.$$

А отсюда слѣдуетъ, что:

$$\frac{gh}{c^2}+0{,}6931-2{,}303\ \log(1+N^2)=\frac{gt}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (B_v)$$

Считая $\frac{1}{c}=\sqrt{\frac{k\Delta M}{p}}$ неизвѣстною, имѣемъ квадратное уравненіе, изъ котораго опредѣлится c, а слѣдовательно и k, болѣе точно, чѣмъ приближенное c_1. Такъ можно приблизиться къ истинному c. Но разсчетъ еще болѣе упрощается, когда $\frac{gt}{c}$ или α велико (болѣе $\alpha=4$ или 5), что будетъ или тогда, когда t велико (это случай практически рѣдкій), или когда c мало и гораздо менѣе gt, то есть, когда предѣльная скорость мала, а такъ какъ $c^2=\frac{p}{k\Delta M}$, то это будетъ не иначе какъ при маломъ вѣсѣ тѣла, погруженнаго въ жидкость и при большомъ его сопротивленіи, напр. при паденіи легкихъ тѣлъ въ воздухѣ или при паденіи въ тяжелыхъ жидкостяхъ. Тогда, въ предѣлѣ обычныхъ точностей наблюденія вмѣсто гиперболической формулы (А), очень неудобной для прямаго разсчета неизвѣстной величины k, можно съ полнымъ правомъ подъ знакомъ логарифма оставить только одинъ большой членъ, содержащій e^{α} въ числителѣ, а второй малый членъ, гдѣ эта величина e^{α} въ знаменателѣ, отбросить. Конечно, чрезъ это значеніе k возрастетъ, но въ такой малой степени, что въ обычныхъ условіяхъ опытовъ разность полнаго и сокращеннаго выраженія не будетъ превосходить возможныя погрѣшности опытовъ, если предѣльная скорость c мала, какъ мы и покажемъ

далѣе надъ однимъ примѣромъ [1]). Но если α мало, что будетъ когда t и Δ малы или p и c велики, напримѣръ при паденіи тяжелаго тѣла въ воздухѣ, тогда слѣдуетъ разсчитывать k по (А). Если же отбросить второй членъ подъ знакомъ log и произвести въ (А) соотвѣтственныя подстановки и упрощенія, то значеніе k опредѣляется очень легко изъ равенства:

$$x^2 - \frac{t}{h}x + 0{,}6931\,\frac{1}{gh} = 0$$

или:

$$x^2 - \frac{t}{h}x + 0{,}07058\,\frac{P}{ph} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

въ которомъ значеніе G для выраженія $g = G\,\frac{p}{P}$, принято равнымъ $G = 9{,}82$, а

$$x = \sqrt{\frac{k\Delta M}{p}}.$$

Выраженіе (В) менѣе точно, чѣмъ (А), но разсчетъ много проще.

Разрѣшая предшествующее уравненіе, то есть находя x, разлагая затѣмъ корень $\sqrt{1 - \frac{0{,}2823\,h}{t^2}\cdot\frac{P}{p}}$ въ строку, которая будетъ сходящеюся при вышепринятомъ условіи, что c мало и притомъ когда (случай паденія легкаго тѣла въ водѣ) $\frac{h}{t^2}$ есть малая дробь, взявъ одни первые члены, имѣющіе наибольшее значеніе, получимъ:

$$x = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{k\Delta M}{p}} = \frac{t}{h}\left(1 - \frac{0{,}07058\,h}{t^2}\,\frac{P}{p}\right)$$

Возвышая въ квадратъ и опять отбрасывая мало значущій квадратъ втораго члена второй части, получимъ, наконецъ, простѣйшее приближенное значеніе:

$$k = \frac{p}{\Delta M}\,\frac{t^2}{h^2} - 0{,}141\,\frac{P}{h\Delta M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

Очевидно, что выраженіе (А) даетъ k точно, а (С) только въ грубомъ приближеніи, и что можно остановиться на любомъ изъ промежуточныхъ приближеній. На частномъ примѣрѣ, взятомъ случайно изъ ряда наблюденій, произведенныхъ зимою 1879—80 года г-жею М. Л. Гроссманъ и мною, можно легко убѣдиться въ степени приближенія, доставляемомъ въ соотвѣтственныхъ условіяхъ такимъ простымъ разсчетомъ, то есть выраженіемъ (С). Замѣчу при этомъ, что при дѣйствительныхъ опытныхъ изслѣдова-

[1]) Уже при $\alpha = 3$ значеніе $e^{-\alpha}$ составляетъ такую малую долю отъ значенія e^{α}, что въ обычныхъ предѣлахъ точности первымъ можно пренебречь, сравнительно со вторымъ.

ніяхъ, когда надо дѣлать много и часто разсчетъ опытныхъ данныхъ, чрезвычайно важный элементъ вѣрности направленія работы составляетъ удобство прилагаемыхъ формулъ, потому что разсчетъ по сложнымъ, хотя бы и точнымъ, формуламъ не только продолжителенъ, но, что гораздо важнѣе, часто сопряженъ съ погрѣшностями счета, которые всякій знаетъ, кто занимался расчисленіемъ сложныхъ и многочисленныхъ наблюденій. Поэтому-то я и старался розыскать для опредѣленія величины k въ томъ частномъ случаѣ (медленное паденіе легкаго тѣла), какой часто бываетъ въ опытахъ, такую формулу, которая, какъ (C), разсчитывается легко и быстро. Притомъ первый членъ ея имѣетъ прямое физическое значеніе, потому что если бы въ опытѣ сразу была достигаема постоянная скорость c, то она была бы равна $\frac{h}{t}$ (это было бы съ нѣкоторою погрѣшностью достигнуто для тѣлъ съ малымъ p, если бы h было очень велико), а мы знаемъ, что $p = k\Delta Mc^2$, а отсюда $k = \frac{pt^2}{\Delta Mh^2}$, то есть получается значеніе перваго члена въ выраженіи (C). Второй членъ имѣетъ поэтому смыслъ поправки, зависящей отъ того, что равномѣрная скорость еще далеко не достигается, но, конечно, чѣмъ меньше P и чѣмъ больше h, тѣмъ второй членъ меньше и, слѣдовательно, тѣмъ ближе опытная скорость къ предѣльной.

Наши опредѣленія дѣлались въ водѣ, налитой въ цилидрическомъ цинковомъ сосудѣ, снабженномъ вмазанными стеклами, служащими для наблюденія временъ паденія; разрѣзъ сосуда эллиптическій, большая ось 400, малая 250 мм. Падалъ латунный шаръ, діаметромъ въ 40,0 миллиметровъ, слѣд. M = 0,001282 кв. метра. Температура воды 10°,5 C., а потому плот. воды Δ=999,7 кило. Вѣсъ шара въ воздухѣ 34,990 гр. Вѣсъ въ пустотѣ, или P = 0,03503 кило. Вѣсъ въ водѣ или движущій вѣсъ p = 0,000854 кило. Считая отъ начала паденія, времена прохожденія падающаго шарика наблюдались на разстояніяхъ: 0,4, 1,0 и 1,6 метра. Притомъ сперва дѣлались наблюденія отъ 0 до 1,4 м., потомъ отъ 0,4 до 1,0 метра, затѣмъ отъ 1,0 до 1,6 м.; въ суммѣ получается данное отъ 0 до 1,6 метра. Времена (число секундъ по ручному хронографу) прохожденія этихъ разстояній опредѣлялись по 5 разъ и результатъ былъ:

	Отъ 0 до 0,4 метра.	Отъ 0,4 до 1,0 метра.	Отъ 1,0 до 1,6 метра.	Въ суммѣ отъ 0 до 1,6 метра.
	3″,1	4″,0	3″,6	10″,7
	3″,0	4″,0	3°,8	10″,8
	2″,9	3″,8	3″,6	10″,3
	3″,0	4″,0	3″,5	10″,5
	3″,0	3″,8	3″,55	10″,35
Среднее	3″,00	3″,92	3″,61	10″,53
Скорость средняя	0м,133	0м,153	0м,161	0м,152

Приведенныя скорости показываютъ, что послѣ прохожденія 1-го метра скорость еще возрастаетъ, хотя и мало, въ предѣлѣ возможныхъ погрѣшностей опыта. Такъ какъ по формулѣ (*a*), считая $c = 0{,}16$ и $\partial(t) = 0{,}1$; $\partial(h) = 0{,}01$, а потому $\partial(v) = \frac{0{,}01}{3{,}6} + \frac{0{,}16,\ 0{,}15}{3{,}6} = 0{,}01$, предѣльная скорость (въ предположеніи пропорціональности сопротивленія квадрату скорости) должна достигаться съ точностью до 0,01 метра чрезъ $t_c = 0{,}1175\ \frac{35{,}03}{0{,}854}\ 0{,}16 \log \frac{2.0{,}16}{0{,}01} = 1'',20$. Въ дѣйствительности послѣ первыхъ трехъ секундъ, скорость различается не болѣе какъ на 0,161 отъ 0,153, то есть на 0,008. Поэтому послѣднюю наблюденную скоростей=0,161 можно считать близкою къ предѣльной и принять c=0,16. Но надо было въ томъ убѣдиться, потому что въ дѣйствительности на пути отъ 1 до 1,6 метра скорость оказалась большею, чѣмъ на пути отъ 0,4 до 1,0 метра. Для этой цѣли шарикъ вынимался немного изъ воды, такъ чтобы его вершина была выше уровня, и тогда отпускался. Чрезъ это онъ пріобрѣталъ въ водѣ съ самаго начала бо́льшую скорость, чѣмъ предѣльная, и эта высшая скорость должна была убывать по мѣрѣ паденія, а въ концѣ его достигать до предѣльной возможной скорости c. При разныхъ начальныхъ погруженіяхъ (отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{3}{4}$ шара надъ водою при началѣ паденія) получены слѣдующія числа:

h отъ 0,4 до 1,0 м. $t = 3'',8$; 3,7; 3,9; 4,0; 3,7; 3,8.
h » 1,0 » 1,6 » $t = 3'',5$; 3,5; 3,8; 4,0; 3,5; 3,6.

Среднее время для перваго промежутка $= 3'',82$, а для втораго промежутка $= 3'',65$, а потому скорость изъ 0,156 переходила въ 0,164 [1]), а въ среднемъ была 0,160 именно такая, какую можно было ждать, судя по вышеприведеннымъ опытамъ паденія погруженнаго шарика. Если бы не была достигнута ни въ томъ, ни въ другомъ рядѣ предѣльная скорость, то первый рядъ далъ бы меньшую чѣмъ c скорость, а послѣдній большую чѣмъ c, согласіе же результата даетъ увѣренность, что предѣльная скорость c въ самомъ дѣлѣ близка къ 0,16.

Принявъ 0,16 за предѣльную скорость, по формулѣ (*c*) находимъ, что

$$k = \frac{0{,}000851}{999{,}7.\ 0{,}001282.\ (0{,}16)^2} = 0{,}0251.$$

Изъ данныхъ опыта очевидно, что средняя возможная погрѣшность въ опредѣленіи временъ не меньше $\partial(t) = 0'',2$, а потому,

[1]) Еслибъ опытъ былъ болѣе точенъ, то очевидно, что въ первомъ промежуткѣ должна бы быть скорость больше, чѣмъ во второмъ. Та разность 0,008 метра, которая здѣсь наблюдается, находится, очевидно, въ предѣлѣ возможныхъ погрѣшностей. Средняя скорость изъ обоихъ рядовъ для двухъ промежутковъ есть 0,1585. Принимая $c = 0{,}16$, мы мало удаляемся отъ средняго результата

если даже δ (h) = 0, то въ опредѣленіи скорости возможна погрѣшность δ (v) = v $\frac{\delta\,(t)}{t}$, а потому, если t = 7,5 (время для пути отъ 0,6 до 1,6 м.) и δ (t) = 0,2, то при c = 0,16, значеніи δ (v) = 0,0043, а отсюда погрѣшность возможная въ k или δ (k) = $\frac{2k}{c}$ δ (v) = 0,0014, то есть составляетъ не менѣе 5%.

Другими словами, уже чрезъ 3 секунды и на разстояніи 0,41 метра отъ начала паденія, скорость становится почти постоянною и не различается, вѣроятно, отъ предѣльной болѣе какъ на 0,005 метра, а при такой точности опредѣляется k съ точностію до 5% его значенія, а потому при скорости 0,16 для нашего шарика значеніе k находится въ предѣлѣ отъ 0,0265 до 0,0238 Это значеніе k отвѣчаетъ сопротивленію воды и шару діаметра d=0,04 м., при скорости v=0,16, что и выражаемъ условно такъ:

Вода. $\frac{\text{Шаръ}}{d = 0{,}04}$ k = 0,0251 кило, при v = 0,16 м.

Для шаровъ близкаго размѣра и для близкихъ и равномѣрныхъ скоростей сопротивленіе можно разсчитывать, пользуясь этимъ значеніемъ k, въ иныхъ же условіяхъ не иначе, какъ послѣ убѣжденія въ вѣрности формулы I сопротивленія. Для того же, чтобы убѣдиться въ этомъ отношеніи, воспользуемся вышеприведенными средствами. Для примѣра беру данныя всего пройденнаго пути, начиная отъ $h = 0$ до $h = 1{,}6$. Тогда t =10,53; h = 1,6; $\frac{p}{\Delta M}$ = 0,000667, g = 0,2395, $\frac{P}{\Delta M}$ = 0,0274, а потому по (A) или по (B) или по (C) получается k = 0,0265. Менѣе полныя формулы (B) и (C) даютъ тоже значеніе k, какъ и грубое приближеніе по (C), потому что величина $\alpha = \frac{gt}{c}$ здѣсь близка къ 16 и e^{α} составляетъ величину болѣе 10-ти милліоновъ, а потому $e^{-\alpha}$ или $\frac{1}{e^{\alpha}}$ ничтожно малая дробь. Пользуясь наблюденіемъ h = 0,4; t = 3″,00, получаемъ k = 0,0280. Для промежутка отъ h = 0 до h = 1,0, t = 3,00 + 3,92 = 6″,92, а потому k = 0,0281, почему изъ наблюденія надъ временемъ паденія, считая отъ его начала, выводится k большее (отъ 0,0265 до 0,0281), чѣмъ изъ наблюденія предѣльной скорости (k = 0,025). Но такъ какъ при началѣ паденія скорость = 0, то моментъ начала паденія трудно наблюдать, и если предположить, что въ началѣ дѣлается погрѣшность, увеличивающая t на 0″,2, то замѣченное различіе изчезаетъ. Такъ напримѣръ, если для перваго промежутка h=0,4 принять t=2,8 вмѣсто 3″,0, то получается k=0,0233 вмѣсто дѣйствительно полученнаго 0,0280, слѣдовательно различія значеній k, полученныя изъ разныхъ наблюденій, *здѣсь* входятъ въ предѣлы возможныхъ погрѣшностей наблюденія или въ этихъ предѣлахъ формулы I и выводимая по ней (A) выражаютъ законъ сопротивленія и паденія въ сопротивляющейся средѣ.

Изъ всего этого видно, что при изученіи законовъ сопротивленія, особенно важное значеніе имѣютъ числа, полученныя при скорости, сдѣлавшейся въ предѣлахъ точности наблюденія постоянною, но могутъ быть примѣняемы и начальныя наблюденія, пользуясь закономъ $p=\Delta k M v^2$. Достоинство же результата (k) зависитъ, конечно, отъ точности наблюденія, какъ предѣльныхъ скоростей, такъ и вообще величинъ h и t. Выводъ этотъ подтверждается при разборѣ слѣдствій того допущенія, что сопротивленіе пропорціонально первой степени скорости.

Если сопротивленіе выражается не I-ю формулою, содержащею v^2, а находится въ иной зависимости отъ v, то эту зависимость легко найдти, измѣняя вѣсъ даннаго тѣла, безъ измѣненія его наружныхъ формъ, и наблюдая вѣса $p_0, p_1 \ldots p_i$, и соотвѣтствующія имъ предѣльныя скорости $v_0, v_1 \ldots v_i$, потому что тогда вѣсъ равенъ сопротивленію и зависимость p отъ v есть зависимость сопротивленія отъ скорости. Когда для наблюденія приходится брать начальныя части пути паденія, гдѣ скорость еще измѣняется, тогда разсчетъ постояннаго коэффиціента k сопротивленія отъ скорости требуетъ знанія закона, связывающаго R съ v. Для примѣра разсмотрю слѣдствія, вытекающія изъ допущенія, что $R = k_1 \Delta M v$, то есть когда сопротивленіе принимается зависящимъ отъ первой степени скорости, какъ это и допускается для поверхностнаго сопротивленія (тренія) параллельныхъ плоскостей при малыхъ скоростяхъ. Основное уравненіе, соотвѣтствующее ускоренію и тому равенству, которое дано на стр. 125, будетъ тогда

$$g - \frac{k\Delta M}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2}.$$

А изъ него, чрезъ двукратное интегрированіе въ предѣлѣ отъ $h=0$ до нѣкотораго опредѣленнаго h, выводится [1]) значеніе h, подобное тому, которое дано (A); а именно, такъ какъ при $h=0$ величина v или $\frac{dh}{dt} = 0$ и такъ какъ при обозначеніи (опять) предѣльной скорости чрезъ c:

$$p = k_1 \Delta M c; \quad g = 9{,}82\ \frac{p}{P}, \quad m = \frac{p}{g}, \quad \alpha = \frac{gt}{c},$$

получается:

$$h = ct - \frac{c^2}{g}\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right) \quad \ldots\ldots\ (D)$$

[1]) Выводъ этой и др. подобныхъ формулъ сопротивленія будетъ помѣщенъ моимъ товарищемъ и другомъ, профессоромъ Д. К. Бобылевымъ, въ приготовляемой имъ къ печати «Аналитической Механикѣ». Обязательное содѣйствіе, оказываемое мнѣ часто Д. К. Бобылевымъ, многократно облегчало мнѣ разрѣшеніе многихъ математическихъ и механическихъ вопросовъ.

Если время t велико, а предѣльная скорость c мала, то дробь, стоящая въ скобкѣ, мала, а потому тогда, послѣ допущеній, подобныхъ тѣмъ, какія мы приняли при переходѣ отъ (A) къ (C), получается:

$$k_1 = \frac{p}{\Delta M}\,\frac{t}{h} - 0{,}102\,\frac{P}{t\Delta M}\ ^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Примѣняя эти формулы къ вышеразобраннымъ (стр. 134—135) наблюденіямъ, получаемъ:

1) $c = 0{,}16$. . . . . $k_1 = 0{,}00417$
2) $h = 1{,}6$; $t = 10{,}53$ . . . . . $k_1 = 0{,}00412$
3) $h = 1{,}0$; $t = 6{,}92$ . . . . . $k_1 = 0{,}00421$
4) $h = 0{,}4$; $t = 3{,}00$ . . . . . $k_1 = 0{,}00407$

Изъ этого видно, что наблюденія, по крайней мѣрѣ, такія, которыя сопряжены съ довольно значительными погрѣшностями, надъ временами паденій даннаго тѣла—могутъ быть съ такимъ же удобствомъ разсчитываемы при допущеніи пропорціональности сопротивленія первой степени скорости, какъ и при допущеніи закона v^2. Болѣе тонкія наблюденія, однако, могутъ и здѣсь дать отвѣтъ положительный между предположеніемъ v или v^2, какъ видно изъ прилагаемой таблицы, разсчитанной по равенству (D) и совершенно соотвѣтствующей вышеприведенной (стр. 127) таблицѣ, разсчитанной по (A):

Значеніямъ gt	Паденіе происходитъ въ пустотѣ	Если паденіе происходитъ въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально v, и если предѣльная скорость c равна:					
		$c =$ 80	40	30	20	10	1 метру.
10	$gh =$ 50	$gh =$ 46,9	46,1	44,9	42,6	36,8	9,00
20	200	175,8	170,4	162,1	147,2	113,6	19,00
30	450	372,0	355,8	331,1	289,2	205,0	29.00
40	800	623,3	588,6	537,2	454,1	301,8	39,00
50	1250	919,7	858,0	770,0	633,0	400,7	40,00

Изъ сличенія съ таблицею, данною на стр. 127, видно, что при однѣхъ и тѣхъ же предѣльныхъ скоростяхъ, при допущеніи закона v проходимые пути въ данное время всегда меньше, чѣмъ пути, проходимые въ тоже время, если сопротивленіе пропорціонально v^2, то-есть предѣльная скорость достигается при законѣ v^2 скорѣе, чѣмъ при законѣ v. А потому тщательное наблюденіе начальныхъ скоростей можетъ рѣшить, по которому изъ двухъ за-

---

[1]) Уже изъ одного сравненія равенствъ (C) и (E) видно, что если мы выразимъ сопротивленіе въ n-ой степени скорости:

$$R = k\Delta M v^n,$$

то приближенное значеніе k получится, когда отъ $\frac{p}{\Delta M}\left(\frac{t}{h}\right)^n$ отнимется $\frac{P}{\Delta M}$, умноженное на тѣмъ меньшую величину, чѣмъ h и t будутъ больше, то-есть чѣмъ большій путь пройдетъ тѣло и чѣмъ скорость его будетъ меньше.

коновъ происходитъ паденіе, даже тогда, когда предѣльная скорость не извѣстна по опыту. Но хотя теоретически это возможно, практически очень трудно достижимо. Въ самомъ дѣлѣ, при паденіи легкаго тѣла p и g мало, и предѣльная скорость достигается очень скоро, а потому въ это краткое время нельзя сдѣлать точныхъ наблюденій, а если p велико и g близко къ 9,8, то-есть Δ мало, какъ, напримѣръ, при паденіи въ воздухѣ, тогда можно наблюдать начальныя скороти; а предѣльныя достигаются на такихъ разстояніяхъ, которыя недоступны для измѣренія. Возьмемъ для примѣра такой воображаемый случай, когда $g = 9{,}0$, и пусть по истеченіи $\frac{50}{9}$ секундъ, пройдено пространство 101,5 метръ съ точностью наблюденія даже очень значительною = 1 метру. Эту точность дѣйствительно должно назвать большою, потому что она отвѣчаетъ погрѣшности въ $\frac{1}{30}$ секунды, считая отъ начала паденія, а такую погрѣшность, особенно для момента начала паденія, сдѣлать легко даже при точнѣйшихъ измѣрительныхъ приборахъ (напр., при регистрирующихъ или самопишущихъ хронографахъ). Если изъ двухъ (по A и D) таблицъ возьмемъ соотвѣтственныя данныя, то увидимъ, что:

Чрезъ	$\frac{10}{9}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{30}{9}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{50}{9}$ секундъ.
По (A) . . . h =	5,45	20,74	43,37	70,40	100,86
„ (D) . . . h =	5,21	19,53	41,22	69,26	102,19

Отсюда видно, что пути, проходимые въ тѣ же времена, въ обоихъ случаяхъ близки, а именно: сначала по закону v^2 они больше, потомъ же при допущеніи закона v, но различія такъ малы, что опытъ тутъ мало что можетъ рѣшить. Иное дѣло, если бы наблюдались окончательныя скорости, потому что указанныя числа отвѣчаютъ въ первомъ рядѣ предѣльной скорости $c = 30$ метровъ, а во второмъ рядѣ предѣльной скорости $c = 50$ метровъ; но эти скорости даже для перваго ряда (формулы a и b) достигаютъ только чрезъ $t_c = 6{,}8$ секундъ и на разстояніи h_c=130 метровъ отъ начала паденія, если точность въ опредѣленіи скорости = 1 метру. Практически это достижимо съ трудомъ. Но измѣненіе вѣса одного и того же тѣла даетъ полную возможность рѣшить вопросъ очень просто, особенно тогда, когда могутъ быть достигнуты предѣльныя скорости. Такъ напр., тотъ самый шаръ, данныя для паденія котораго въ водѣ приведены выше, на стр. 134, при измѣненіи вѣса представляетъ слѣдующія предѣльныя скорости, наблюденныя М. А. Гроссманъ тѣмъ же способомъ, какъ и въ вышеуказанномъ примѣрѣ:

Вѣсъ въ водѣ $p = 0{,}396$	0,854	1,434	2,737	граммовъ
Пред. скор. . $c = 0{,}110$	0,160	0,203	0,283	метровъ въ 1″

Чтобы узнать, какой степени скорости пропорціонально сопротивленіе (здѣсь оно $= p$), руководясь формулою I, находимъ значенія $\frac{p}{c^2}$, которыя должны быть величиною постоянною $= k\Delta M$, если сопротивленіе дѣйствительно пропорціонально квадрату скорости. Въ самомъ дѣлѣ, изъ нашихъ опытныхъ данныхъ имѣемъ:

$$\frac{p}{c^2} = \quad 32{,}7 \quad 33{,}4 \quad 34{,}8 \quad 34{,}2.$$

Если бы формула $R = k_1 \Delta M v$ была болѣе справедлива, то-есть если бы сопротивленіе было пропорціонально первой степени скорости, то постоянно было бы частное $\frac{p}{c}$, а въ дѣйствительности оно оказывается быстро возрастающимъ со скоростью:

$$\frac{p}{c} = \quad 3{,}60 \quad 5{,}34 \quad 7{,}06 \quad 9{,}67.$$

А потому несомнѣнно: 1) что сопротивленіе въ дѣйствительности ближе къ пропорціональности съ v^2, чѣмъ съ v, а потому разсчетъ по I и по (A), (C), (*c*) надежнѣе для вывода законовъ, чѣмъ по какимъ-либо другимъ формуламъ (напр., D, E), и 2) что наблюденія при постоянныхъ, предѣльныхъ скоростяхъ во всѣхъ отношеніяхъ болѣе поучительны и скорѣе могутъ служить для рѣшенія задачъ сопротивленія, чѣмъ наблюденія, произведенныя при началѣ паденія и при неустановившемся движеніи. Это необходимо имѣть въ виду, пользуясь паденіемъ для опредѣленія сопротивленій.

Послѣ этихъ общихъ замѣчаній обратимся къ отчету о тѣхъ измѣреніяхъ сопротивленій, какія получаются изъ наблюденій надъ временами паденія.

Первыя ясныя и связныя представленія, относящіяся къ вліянію сопротивленія на скорость паденія, сколько мнѣ извѣстно, высказаны были раньше Ньютона **Маріоттомъ**, въ серединѣ XVII-го столѣтія, въ сочиненіи: Traité de la percussion ou choc des corps, dans lequel les principales regles du mouvement sont expliqués et demonstrées par leurs veritable causes [1]). Такъ Маріоттъ зналъ, что

[1]) Сочиненіе это (не знаю, когда оно явилось въ первый разъ) извѣстно мнѣ по Лейденскому изданію (Pierre Vander) 1717 года, гдѣ собраны послѣ смерти всѣ произведенія Маріотта, перепечатанныя съ прежнихъ, лучшихъ и полнѣйшихъ. Эту книгу, вмѣстѣ съ сочиненіями Бойля, нельзя не рекомендовать, какъ поучительныя для исторіи физическихъ наукъ того времени. Я думаю, что всякій будетъ читать ихъ съ удовольствіемъ, какъ и болѣе позднія сочиненія Дюбюа, Лавуазье и т. п., потому что ясность метода, важность и простота постановки опытовъ и вопросовъ, безъ чопорнаго чванства иныхъ мудрецовъ—дѣлаютъ эти книги образцовыми для направленія, принятаго естествознаніемъ въ два предшествующіе намъ вѣка.

каждое тѣло, падающее въ воздухѣ и всякой другой жидкости, пріобрѣтаетъ нѣкоторую опредѣленную, предѣльную скорость, и далъ правила для ея разсчета. Свинцовый шаръ (пуля), въ 6 линій діаметромъ, по примѣрному разсчету Маріотта, пріобрѣтаетъ, послѣ 9—10 секундъ паденія, пройдя около 900—1000 футовъ, постоянную скорость около 140 футъ въ секунду. Опытныя основанія этого разсчета приводятся далѣе, но мнѣ кажется нелишнимъ тотчасъ найти изъ этого даннаго то значеніе k, которое ему отвѣчаетъ, пользуясь уравненіемъ (*c*). Діаметръ = 1,354 сантим., вѣсъ куб. сантиметра употребленнаго свинца Маріоттъ принимаетъ равнымъ 11,0 грам., а потому $p = 0{,}0143$ кило, плотность воздуха принимаю $\Delta = 1{,}22$, сѣченіе M = 0,000144 кв. метра, предѣльная скорость по Маріотту $c = 45{,}5$ метровъ. Откуда по (*c*) значеніе $k = 0{,}039$. Позднѣйшія наблюденія, какъ увидимъ далѣе, даютъ для шаровъ, въ большинствѣ случаевъ, числа меньшія, чѣмъ 0,04, однако близкія къ 0,04, но здѣсь скорости велики, а при бо́льшихъ скоростяхъ k растетъ. Уже изъ этого примѣра видно, какъ высоко надо цѣнить данныя такого наблюдателя, какъ Маріоттъ.

Переходя отъ скоростей паденія свинцоваго шара къ временамъ паденія восковаго, пробковаго, золотого и водяного (капель) шаровъ того же діаметра, Маріоттъ пользуется своимъ 25-мъ предложеніемъ, которое можетъ быть выражено такъ: квадраты предѣльныхъ скоростей, достигаемыхъ при паденіи тѣлъ одинаковыхъ по формѣ (размѣрамъ), но различныхъ по плотности, находятся въ отношеніи плотностей [1]). Такое и многія другія положенія ясно показываютъ, что въ срединѣ XVII-го столѣтія, раньше Ньютона, твердо понималась уже пропорціональность сопротивленія съ квадратомъ скорости, потому что указанное положеніе есть одна изъ формъ его выраженія, соотвѣтствующая I-му равенству или (*c*). Дѣйствительно, для предѣльной скорости c вѣсъ p = объему на плотность = сопротивленію, а потому, если ω есть общій объемъ и M общій мидель, а D и D_1 разныя плотности тѣлъ, c и c_1 разныя ихъ предѣльныя скорости: ω. $D = k\Delta Mc^2$ для одного тѣла и $\omega D_1 = k\Delta Mc_1^2$ для другаго тѣла, а потому $c^2 : c_1^2 = D : D_1$, что и утверждалъ Маріоттъ. Отсюда онъ выводитъ предѣльныя скорости шаровъ различнаго вещества, а затѣмъ для даннаго вещества и шаровъ разнаго діаметра. Далѣе Маріоттъ предлагаетъ способы производства наблюденія и описываетъ свои опыты, произведенные въ сквозномъ свободномъ пространствѣ вин-

[1]) Маріоттъ такъ формулируетъ свою XXV теорему: «Les corps égaux en volume, semblables et semblablement posés, et de pesanteurs inégales, acquièrent en tombant à travers l'air des vitesses complettes qui sont l'une à l'autre selon la raison sous doublée de leurs poids». Въ задачахъ и опытахъ, описываемыхъ вслѣдъ затѣмъ, это правило уясняется, и мнѣ казалось наиболѣе яснымъ придать теоремѣ Маріотта вышеприведенную форму, въ которой смыслъ предложенія становится очевиднымъ.

товой лѣстницы съ башни въ подвалы парижской обсерваторіи. Наблюдатель держитъ между двумя пальцами два шарика, и они выпускаются единовременно. Одинъ падаетъ, а другой есть полусекундный маятникъ, дающій возможность сосчитать время, прошедшее до того момента, когда слышенъ звукъ упавшаго шарика, происходящій отъ удара о звучное препятствіе, поставленное на опредѣленномъ разстояніи отъ точки начала паденія. Дѣлается поправка на скорость звука, считая скорость его равною 1080 париж. футовъ. Полученныя данныя суть:

	Діаметръ:	Высота h:	Время исправлено:	Плотность къ водѣ:	
1) Свинцовый шаръ.	6 линій.	166,5 ф.	3,62 сек.	11,0	c=140,0 ф.
2) Онъ же.	— »	87,5 »	2,58 »	11,0	—
3) Восковой шаръ[1]).	6 »	126,5 »	4,09 »	1,0	43,5 »
4) Онъ же	— »	71,0 »	2,66 »	1,0	—
5) Пробковый шаръ.	6 »	71,0 »	4,00 »	0,25	22,0 »
6) Восковой шаръ .	8 »	71,0 »	2,47 »	1,0	—
7) Пробковый шаръ.	12 »	71,0 »	3,25 »	0,24	31,0 »

Въ послѣднемъ столбцѣ дана предѣльная скорость, принятая Маріоттомъ на основаніи многихъ, точнѣе не описываемыхъ имъ, опытовъ и соотвѣтственныхъ разсчетовъ. Вотъ эту-то предѣльную скорость лучше и удобнѣе всего принять для опредѣленія k, судя по соображеніямъ, развитымъ на предшествующихъ страницахъ. При этомъ дѣлаемъ всѣ переводы къ метрической системѣ, находимъ движущій вѣсъ p по плотности, данной Маріоттомъ; пользуемся формулой (c) и принимаемъ для воздуха $\Delta = 1{,}22$ (у Маріотта не дано ни давленія, ни температуры); эта плотность отвѣчаетъ давленію $760^{мм}$ и температурѣ 15° Ц.

№ опыта.	Вѣсъ, кило.	Сѣченіе кв. м.	Пред. ск. метр.	По форм.(c).
1 и 2	$p = 0{,}01430$	$M = 0{,}000144$	$c = 45{,}5$	$k = 0{,}039$
3 и 4	0,00130	0,000144	14,1	0,037
5	0,00032	0,000144	7,1	0,036
7	0,00260	0,000576	10,1	0,036

Изъ этихъ чиселъ видно, что k растетъ со скоростью. Но не надо забывать, что значенія c прямо въ наблюденіяхъ Маріотта не получались, а потому содержатъ уже въ себѣ нѣкоторыя предположенія, а потому, если бы полнота и качество наблюденій Маріотта заслуживали бо́льшаго довѣрія, чѣмъ послѣдующія наблюденія подобнаго же рода, слѣдовало бы изъ прямыхъ данныхъ опыта, при помощи равенства (A), опредѣлить значенія k. Но мы этого не дѣлаемъ, потому особенно, что главное данное, необходимое для разсчета, а именно вѣсъ (p) въ жидкости (здѣсь въ воздухѣ), у Маріотта не данъ, и его приходится находить предположительно, по размѣрамъ и плотностямъ шаровъ, а это сомнительно [2]).

[1]) Въ немъ немного песку, чтобы сдѣлать плотность равною водѣ.

[2]) Для опыта 1-го: $g = 9{,}81$ метр. $t = 3'',62$, $h = 9{,}81$ метр. $t = 52{,}08$ метр.,

Интересъ опредѣленій Маріотта состоитъ въ томъ, что его опыты относятся къ XVII столѣтію, первые между рядомъ дальнѣйшихъ, предшествуютъ опытамъ Ньютона и разсчитаны самимъ Маріоттомъ на основаніи закона квадратовъ скоростей, что̀ показываетъ ясно извѣстность этого закона раньше Ньютона, къ опытамъ котораго мы теперь и перейдемъ.

Ньютонъ, изложивъ свою теорію сопротивленія (приложеніе 1-е) и приложивъ ее къ шарообразнымъ тѣламъ, во II-й книгѣ (De motu corporum, liber secundum) своего безсмертнаго сочиненія Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica [1]), въ самомъ концѣ Sectio VII (De motu fluidorum et resistentia projectilium), описываетъ свои опыты надъ опредѣленіемъ времени паденія шаровъ въ водѣ и воздухѣ. Первые 12-ть опытовъ относятся къ водѣ, два послѣднихъ къ воздуху. Оба эти ряда опытовъ мы опишемъ отдѣльно, потому что ихъ условія и способъ вывода изъ нихъ значенія k весьма различны.

Въ квадратномъ деревянномъ сосудѣ (размѣры 9 дюймовъ на 9″ въ поперечникѣ и $9^1/_2$ футовъ глубины) была налита дождевая вода (вѣсъ куб фута ея Ньютонъ считаетъ 76 римскихъ фунтовъ и куб. дюйма=$253^1/_3$ грана) и въ ней съ высоты 112 дюймовъ падали восковые шары, въ которыхъ былъ вплавленъ свинецъ, для приданія имъ различной плотности. Въ этомъ сосудѣ сдѣланы опыты 1, 2 и 3-й, произведенные Ньютономъ ранѣе, чѣмъ онъ составилъ свою теорію, какъ упоминаетъ о томъ онъ самъ, а послѣ того опыты дѣлались въ сосудѣ шириною $8^2/_3$ дюйма, глубиною $15^1/_3$ футовъ. Замѣтивъ въ опытахъ 4, 5, 6 и 7, что шары вращаются, уклоняются отъ вертикали и тогда падаютъ медленнѣе, Ньютонъ сталъ помѣщать свинецъ ближе къ периферіи шаровъ и заставлялъ ихъ падать, обративъ свинцовую часть шара книзу. Поэтому опыты 8, 9, 10, 11 и 12 надо считать наиболѣе точными. Въ нѣкоторыхъ опытахъ было взято по нѣсколько одинаковыхъ шаровъ. Число шаровъ мы означаемъ около нумера опыта въ скобкахъ, если было взято нѣсколько. Время опредѣлялось по секундному или полусекундному маятнику. Подъ знакомъ t мы даемъ секунды, руководствуясь или среднимъ числомъ изъ приведенныхъ у Ньютона, или его указаніемъ на числа,

---

а потому ордината кадоиды y или $\frac{h}{gt^2}$=0,434, откуда (по таблицѣ координатъ кадоиды) α=1,00, слѣдовательно $c=\frac{gt}{\alpha}$=35,5 метровъ, а не 45,5, какъ считаетъ Маріоттъ. Слѣдовательно, изъ его данныхъ значеніе α будетъ еще болѣе, чѣмъ выше приведено, что̀ несогласно съ позднѣйшими наблюденіями. Тѣмъ замѣчательнѣе, что Маріоттъ самъ выводитъ такія предѣльныя скорости, которыя отвѣчаютъ значеніямъ k, близкимъ къ полученнымъ позднѣйшими наблюденіями, напр. Рейхомъ

[1]) Числа, приводимыя нами, взяты изъ третьяго изданія (London. apud G. et J. Innis MDCC XXVI), подписаннаго еще самимъ Ньютономъ въ предисловіи «Jan. 12, 1725—6».

заслуживающія наибольшаго довѣрія по обстоятельствамъ, встрѣтившимся въ опытѣ. Ньютонъ даетъ вѣсъ въ гранахъ (troy pound). При переводѣ въ метрическую систему мы считаемъ 1 гранъ = 0,0000648 кило, а 1 дюймъ = 0,0254 метра.

Подлинныя данныя опытовъ Ньютона:

Номеръ опыта (и число шаровъ).		Вѣсъ шара въ воздухѣ, граны Q.	Вѣсъ шара въ водѣ, граны q.	Время паденія, секунды. Среднее, вѣроят.	(Отъ u до) сек.	Высота паденія, дюймы L.
1	(1)	$156^1/_4$	77	$t=4$		112
2	(3)	$76^1/_3$	$5^1/_{16}$	15		112
3	(3)	121	1	$47^2/_3$	(46—50)	112
4	(4)	$139^1/_4$	$7^1/_8$	$24^7/_8$	(24—26)	182
5	(4)	$154^3/_8$	$21^1/_2$	$14^5/_8$	(14—16)	182
6	(5)	$212^3/_4$	$79^1/_2$	$8^3/_{20}$	($7^1/_2$—9)	182
7	(4)	$243^3/_8$	$35^7/_8$	$15^1/_2$	($14^1/_2$—$16^1/_2$)	$181^1/_2$
8	(4)	139	$6^1/_2$	$25^1/_2$	(25—26)	182
9	(4)	$273^1/_4$	$140^3/_4$	$6^1/_4$	(6—$6^1/_2$)	182
10	(4)	384	$119^1/_2$	$9^1/_{24}$	(9—$9^1/_2$)	$181^3/_4$
11	(3)	48	$3^{29}/_{32}$	$22^1/_2$	($21^3/_4$—23)	$182^1/_2$
12	(3)	141	$4^3/_8$	$31^1/_2$	($30^1/_2$—$32^1/_2$)	182

Такъ какъ во всѣхъ этихъ опытахъ α въ формулѣ (A) велико [1]), то разсчетъ можно производить по формулѣ (C). Для вычисленія надо знать плотность воды, но температура не дана, а потому Δ принимаю равнымъ 999, какъ близкую къ обыкновенной. Для опредѣленія наибольшаго поперечнаго сѣченія M служила слѣдующая формула:

$$M=\pi\sqrt[3]{\left(\frac{P-p}{\Delta}\,\frac{3}{\pi 4}\right)^2},$$

гдѣ P и p суть вѣса въ пустотѣ и въ водѣ, выраженныя въ килограммахъ. Чтобы изъ вѣса Q въ гранахъ въ воздухѣ и изъ q вѣса въ водѣ перейдти къ вѣсу въ кило въ пустотѣ P и въ водѣ p, служили приблизительныя формулы [2]).

$$\left.\begin{aligned} P&=\left(Q+\frac{Q-q}{830}\right)0{,}0000648\\ p&=q\ 0{,}0000648\end{aligned}\right\}\ \text{въ килограммахъ.}$$

[1]) Наибольшая скорость паденія была въ 1-мъ опытѣ, но и тогда $t=4''$, $g=9{,}81\frac{77{,}0}{156{,}35}=4{,}83$, а c близко къ 0,72, а потому $\alpha=\frac{gt}{c}=26{,}8$ вслѣдствіе чего e^{α} въ громадное число разъ превосходитъ $e^{-\alpha}$.

[2]) Точнѣе нельзя взять, п. ч. не даны ни температура, ни давленіе, ни влажность воздуха. Мы приняли воздухъ въ 830 разъ легче воды. Да впрочемъ, точныя формулы перевода не повліяли бы замѣтно на точность результата, потому что во временахъ паденія — главная причина нѣкоторой неизбѣжной погрѣшности результата k.

Пройденное пространство h въ метрахъ:

$$h=L\ 0{,}0254.$$

Сообразно этому, по даннымъ Q, q, t и L и по формулѣ (C) имѣемъ, съ соотвѣтственною дѣлу точностію, въ метрической системѣ:

$$k=0{,}13095\frac{39{,}37\ qt^2-0{,}1411\ QL}{L^2(Q-q)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\log = 0{,}11710-1.$$

Опыты Ньютона располагаемъ затѣмъ по порядку величины движущаго вѣса (p или q):

Номеръ опыта.	Движущій вѣсъ, граны.	Значеніе k въ L по метрич. системѣ.	Средняя скорость, метры.	Діаметръ, метры.
3	1,00	0,03755	0,06	0,025
11	3,91	0,02417	0,21	0,018
12	4,37	0,02493	0,15	0,026
2	5,06	0,02650	0,19	0,021
8	6,50	0,02477	0,18	0,026
4	7,12	0,02614	0,18	0,025
5	21,50	0,02558	0,30	0,025
7	35,85	0,03565	0,30	0,032
1	77,00	0,02605	0,71	0,021
6	79,50	0,03098	0,56	0,025
10	119,50	0,03606	0,50	0,032
9	140,75	0,03186	0,74	0,025

Числа двухъ послѣднихъ столбцовъ даны только для того, чтобы видѣть степень разнообразія скоростей и діаметровъ. Величина шаровъ, какъ видно изъ послѣдняго столбца, различалась мало между собою, а потому главныя причины, вліявшія на различіе величины k, только двѣ: различіе скоростей отъ 6-ти до 74 сантиметровъ въ секунду и погрѣшность, опытамъ свойственная по разнымъ причинамъ (∂t, ∂h, ∂p) и между прочимъ зависящая отъ узкости сосуда. Такъ значительныя величины k, полученныя для 3, 7 и 10 опытовъ, опредѣляются по всей вѣроятности тѣмъ, что въ первомъ движущій вѣсъ (всего 1 гранъ) опредѣленъ съ погрѣшностію, ибо очень малъ, а въ двухъ другихъ діаметръ (0,032) шаровъ больше, чѣмъ у остальныхъ шаровъ, и ширина сосуда (0,22 метра) только въ 6,9 разъ превосходила діаметръ шаровъ, взятыхъ въ этихъ опытахъ, а потому, если паденіе не было центрально, то стѣнки были близки и представляли особое сопро-

тивленіе За исключеніемъ этихъ трехъ опытовъ, среднее изъ 9-ти остальныхъ:

$$\text{вода } \frac{\text{шаръ}}{d=0{,}03\text{ м.}},\quad k=0{,}0268 \text{ кило, при } v=\frac{\text{отъ } 0{,}0 \text{ м.}}{\text{до } 0{,}7 \text{ м.}}.$$

Тогда какъ общее среднее $k=0{,}0292$. Судя по одному тому, что въ одномъ изъ близкихъ къ среднему и вообще одному изъ лучшихъ опытовъ, а именно въ № 8, наблюдались времена паденій «постоянно между 25 и 26″ секундами», какъ пишетъ самъ Ньютонъ, то даже въ лучшемъ опытѣ $\delta(t)$ была не менѣе 0,5″, откуда, такъ какъ средняя скорость около 0,3 м., а среднее время паденія около 15″, погрѣшность въ скорости не менѣе $\delta(v)=\frac{0{,}3.\delta(t)}{15}=0{,}01$, слѣдовательно возможная погрѣшность въ k не менѣе $\delta(k)=\frac{2k}{v}\delta(v)=0{,}0018$. Навѣрное она гораздо болѣе этой. Слѣдовательно, изъ данныхъ Ньютона для паденія шаровъ можно принять $k=0{,}027\pm0{,}003$, что подходитъ и къ другимъ позднѣйшимъ даннымъ.

Кромѣ этихъ, у Ньютона описываются (подъ №№ 13 и 14) опыты, сдѣланные съ легкими шарами, падающими въ воздухѣ. Эти опыты сдѣланы были имъ въ іюнѣ 1710 и въ іюлѣ 1719 года въ церкви св. Павла въ Лондонѣ, первые съ Hawksee и др., вторые съ Desagulier и др. Въ опытахъ 1710 г. высота паденія =220′= 67,05 м.; падали шары стеклянные двухъ родовъ: одни небольшіе (около 20 мм. діаметра) со ртутью, другіе гораздо больше (около 130 мм.) съ воздухомъ. Шары располагались на срединѣ горизонтальной доски, одно ребро которой снабжено было осью, такъ что когда доска отпускалась, шары скатывались и доска падала, а секундный маятникъ начиналъ свои качанія. Прямыя данныя опытовъ:

Шары со ртутью.				Шары съ воздухомъ.		
Вѣсъ, граны.	Діаметръ, дюймы.	Время, секунды.		Вѣсъ, граны.	Діаметръ, дюймы.	Время, секунды.
918	0,8	4		510	5,1	8,5
983	0,8	4 —		642	5,2	8,0
866	0,8	4		599	5,1	8,0
747	0,75	4 +		515	5,0	8,25
808	0,75	4		483	5,0	8,5
784	0,75	4 +		641	5,2	8,0
851	0,775	4	Среднее	565	5,1	8,21

Эти данныя Ньютонъ поправляетъ на время отъ начала движенія маятника до начала паденія, и эту поправку считаетъ око-

ло (circiter) 18 терцій или 0″,3, что́ и отнимаетъ отъ всѣхъ наблюденныхъ временъ. Мы дѣлаемъ тоже со среднимъ, выводимымъ изъ опытовъ, хотя считаемъ, что эта поправка у Ньютона ничѣмъ не объяснена, даже знакъ + или — поправки не достаточно ясенъ, потому что неизвѣстно, въ какой моментъ начинались качанія маятника: въ тотъ ли, когда доска начала опускаться, или въ какой другой [1]).

Поэтому среднее время паденія для легкихъ шаровъ t=7″,91, высота паденія h=67,05, вѣсъ въ воздухѣ p=0,03661, діаметръ = 0,1295 м., сѣченіе M=0,01317 кв. м. Данныхъ для плотности воздуха Ньютонъ не приводитъ, а потому мы принимаемъ Δ=1,2, какъ отвѣчающую средн. температурѣ и давленію. Отсюда вѣсъ въ пустотѣ, P=0,03795; $g=9{,}81\frac{3661}{3695}=9{,}46$; gt=74,8; gh=638,3. По этимъ среднимъ даннымъ и формулѣ (A) находимъ, что предѣльная скорость c=9,342, потому что, полагая c=9,3 м., получаемъ gh=635,7, а полагая c=9,4 м., gh=641,9 м. Отсюда k=0,0265. Вычисляя же по приближенной формулѣ (C), получаемъ k=0,0272. Поэтому:

Воздухъ; $\frac{\text{шаръ}}{d=0{,}13\text{м.}}$; k=0,0265 кило, при $v=\frac{\text{отъ 0 м.}}{\text{до 9,3 м.}}$.

Эта величина почти тождественна съ вышенайденною для воды, но для ея полученія введена Ньютономъ поправка 0″,3, которую нѣтъ основаній принять съ достовѣрностію (не вводя же ее, получается однако k около 0,029), а потому опыты 1719 г., лишенные этого недостатка, внушаютъ большее довѣріе. При производствѣ этихъ послѣднихъ опытовъ, взяты были шарообразные (особо для того растянутые) свиные пузыри и свинцовые шары въ 2 ф. вѣсовъ. Тѣ и другіе падали при этомъ съ высоты 27½ футовъ. Опытъ показалъ, что время паденія свинцоваго шара =4,25 сек. Къ наблюдаемой разности временъ паденія обоихъ шаровъ приходилось прибавлять это число и этимъ путемъ получены въ двухъ рядахъ опытовъ слѣдующія числа, выражающія времена паденія 5-ти пузырей:

въ первомъ опытѣ.	19,00;	17,00;	18,875;	22,00	21,125 секундъ,
во второмъ »	18,75;	18,50;	18,250;	23,25;	21,000 »

Эти наблюденія сдѣланы лицами, бывшими внизу и наблюдавшими разность временъ паденія свинцовыхъ шаровъ и пузырей.

---

[1]) Судя по описанію, можно думать даже, что маятникъ начиналъ качаться послѣ скатыванія шаровъ, а потому поправка должна прибавляться, а не отниматься, какъ дѣлаетъ Ньютонъ, тогда k будетъ гораздо болѣе, что́ не согласно съ опытами 1719 г. Я оставилъ однако способъ поправки, самимъ Ньютономъ введенный, п. ч. было бы еще болѣе сомнительно вводить поправку прямо противоположную Ньютоновой.

*

Лица, бывшія наверху, прямо наблюдали времена паденія пузырей и получили:

въ первомъ опытѣ 19,375; 17,250*; 18,750; 22,125*; 21,625 сек.
во второмъ » 19,000*; 18,625; 18,375*; 24,000; 21,250 »

Совершенная прямизна паденія наблюдалась только въ опытахъ, отмѣченныхъ звѣздочкой (*). Пятый пузырь былъ со складкой. Мы его однако не исключаемъ (какъ это дѣлаетъ и самъ Ньютонъ, — разсчитывая данныя для него), потому что у него данныя близки къ тѣмъ, которыя получены для 4-го пузыря. Ньютонъ для разсчета принимаетъ времена паденій:

19,00; 17,00; 18,50; 22,00; 21,125 секундъ.

Если же взять среднія изъ четырехъ наблюденныхъ временъ, то получается:

19,03; 17,84; 18,56; 22,84; 21,25 секундъ.

Взявши же для первыхъ четырехъ пузырей только тѣ данныя, при которыхъ находится звѣздочка (*), имѣемъ среднее:

18,88; 17,13; 18,31; 22.06; 21,25 секундъ.

Поэтому вышеприведенный Ньютоновъ выборъ временъ паденія не имѣетъ основаній; болѣе можно довѣрять послѣднему выводу, который мы далѣе примѣняемъ къ разсчету. Вѣса пузырей были слѣдующіе:

128; 156; 137,5; 97,5; 99,125 грановъ.

Діаметры:

5,28; 5,19; 5,3; 5,26; 5,0 дюймовъ.

Сличая вѣса и времена, видно, что всѣ пять пузырей представляютъ двѣ группы, въ одной первые три, въ другой два остальныхъ, и такъ какъ особой точности въ опытахъ нѣтъ, то беремъ среднее по этимъ двумъ группамъ:

1, 2, 3. Вѣсъ 140,5 грановъ. Время 18″,11. Діаметръ 5,26 дюйм.
4, 5. » 98,3 » » 21,65. » 5,13 »

Переводя въ метрическую систему и пользуясь (опять допуская $\Delta=1{,}2$) формулою (A) или (B), имѣемъ:

№ опыта.	p килогр.	Діаметръ, метры.	М. кв. м.	h метры.	g метры	P килогр.	t секунды.	c метры.	k килогр.
1, 2, 3,	0,00910	0,1336	0,0140	82,91	8,42	0,01060	18,11	4,68	0,0249
4, 5.	0,00647	0,1303	0,0133	82,91	8,20	0,00786	21,65	3,89	0,0269

Среднее изъ обоихъ данныхъ:

Воздухъ $\frac{\text{шаръ}}{d=0{,}13\text{ м.}}$, $k=0{,}0259$ кило, при v $\frac{\text{отъ 0 м.}}{\text{до 4 м.}}$.

Этотъ выводъ такъ близокъ къ предшествующему и къ тому, который вытекаетъ изъ первыхъ 12-ти опытовъ, сдѣланныхъ въ водѣ, что становится очевиднымъ, какъ k близко къ 0,026, для воды и воздуха при скоростяхъ отъ 0 до 1, и даже до 9 метровъ. Такимъ образомъ опыты Ньютона установили: 1) пропорціональность сопротивленія съ v^2, 2) пропорціональность сѣченію M, 3) пропорціональность плотности среды Δ, то есть то, что выражаетъ формула I. Это тѣмъ болѣе замѣчательно, что по теоретическимъ воззрѣніямъ Ньютона (приложеніе 1-е) должно было ждать для воздуха и воды разныхъ сопротивленій. Сверхъ того, потому еще, что числа, полученныя Маріоттомъ раньше Ньютона, даютъ иные численные результаты.

Между позднѣйшими опытами, произведенными надъ паденіемъ тѣлъ въ воздухѣ, особаго вниманія заслуживаютъ опредѣленія Бенценберга и Рейха. Оба они, вслѣдъ за рядомъ другихъ изслѣдователей, занимались въ сущности другимъ вопросомъ: отклоненіемъ падающаго тѣла отъ вертикальной линіи, потому что въ свое время думали этимъ путемъ найдти физическое доказательство вращенія земли. Поэтому оба брали тяжелые шары и заставляли ихъ падать съ большой высоты. Хотя прямая цѣль опытовъ не много прибавила къ сущности знаній, но попутно тотъ и другой изъ названныхъ изслѣдователей опредѣлили и времена, потребныя для прохожденія опредѣленныхъ пространствъ. Эти данныя имѣютъ особое и важное значеніе именно по той причинѣ, что плотности падающихъ тѣлъ были велики, а потому достигались большія скорости и паденіе мало отличалось отъ свободнаго паденія тѣлъ. Тѣмъ не менѣе законъ сопротивленія выступаетъ здѣсь съ ясностію, а потому мы подробно разсмотримъ особенно тщательные опыты **Бенценберга**, драгоцѣнные потому, что онъ опредѣлялъ время паденія не только отъ начала паденія до конца, какъ Ньютонъ и Рейхъ, а также и на нѣсколькихъ промежуточныхъ точныхъ, что было ему возможно, потому что опыты производились имъ внутри сквозной колокольни церкви св. Михаила (Michaelisthurm) въ Гамбургѣ; площадки лѣстницы допускали полную возможность такихъ наблюденій. Вся высота колокольни 402½ париж. фута, а крайнее разстояніе, отъ верхней точки, гдѣ начиналось паденіе, до нижней, внутри колокольни, было 340 парижскихъ футовъ. Бенценбергъ подробно описываетъ употребленные приборы, способы наблюденія и поправки въ Gilbert's Annalen 1802 и 1803 г. и въ очень интересной своей книгѣ: D-r Benzenbergs Versuche über die Umdrehung der Erde (Dortmund. 1804), въ которой, кромѣ его собственныхъ опытовъ, изложена исторія разныхъ сторонъ вопроса о паденіи тѣлъ. Тѣ числа, которыя приводятся далѣе, взяты изъ этого сочиненія, и я ограничиваюсь только средними исправленными данными, приведя для примѣра сводъ данныхъ для третьяго разстоянія, равнаго 144 парижскимъ футамъ, чтобы показать отчетливость данныхъ Бенценберга. Наблюденія

были сдѣланы въ 5 дней. В означаетъ показаніе барометра (парижскіе дюймы), T — температуру [1]), *a*—поправку на уравненіе времени, *b*—поправку на скорость звука (считая скорость=1038′ въ сек.), *c*—постоянную поправку на ходъ часовъ и на отчетъ времени. Подъ чертой дано среднее. Время выражено у Бенценберга секундами. терціями и десятыми терцій, но такъ какъ 3 секунды вездѣ одни и тѣже, то въ таблицѣ приведены наблюденныя терціи, а въ среднемъ результатѣ и поправкахъ даны сверхъ того и десятыя терцій.

	8 Мая.	11 Мая.	15 Мая.	15 Мая.	20 Сент.	20 Сент.
B	28,2	28,1	28,1	—	27,7	—
T	20°	14°	9°	—	15°	—
	34‴	33‴	24‴	31‴	34‴	31‴
	35	36	31	36	23	36
	29	32	31	33	37	27
	24	34	27	26	27	33
	32	36	27	34	29	39
	27	35	31	32	34	27
	30	29	29	34	23	31
	29	33	34	37	30	24
	27	33	33	31	37	33
	24	32	35	28	30	24
	25	28	38		29	32
	34					
	35					
	29,7	32,8	30,7	32,3	30,3	30,5
a	—3,2	—3,3	—4,0	—4,0	—2,0	—2,0
b	—8,3	—8,3	—8,3	—8,3	—8,3	—8,3
c	—12,7	—12,7	—12,7	—12,7	—12,7	—12,7
	5,5	8,5	5,7	7,2	7,3	7,5

Среднее изъ этихъ послѣднихъ: время=3 секунд. 6,95 терцій. Приводимъ затѣмъ общій сводъ данныхъ Бенценберга и разсчетъ Брандеса (въ цитированномъ сочиненіи стр. 185 и 196), основанный: 1) на допущеніи Ньютонова закона сопротивленія, по которому наше k въ I равно $0{,}0255 = \frac{1}{2.g}$, 2) на томъ, что плотность воздуха принята 800 разъ меньшею, чѣмъ для воды, 3) на томъ, что діаметръ шаровъ = 1,46 париж. дюймамъ, 4) что плотность сплава, содержавшаго 9 ч. свинца и 1 часть олова, = 10,9 и 5) что ускореніе тяжести въ Гамбургѣ G=15,1013 париж. фута. Данныя въ таблицѣ времена выражены секундами и терціями, которыя другъ отъ друга отдѣлены для ясности знакомъ +.

[1]) Какой термометръ, не знаю; полагать надо, что Реомюровъ.

Высота паденія въ парижскихъ футахъ	По опытамъ Бенценберга, время паденія.	По теоріи Ньютона, время паденія.	Время паденія въ пустотѣ.
	сек. терціи.	сек. терціи.	сек. терціи.
24,8	1+17,08	1+17,01	1+16,89
27,7	2+ 8,77	2+ 7,55	2+ 7,04
144,0	3+ 6,95	3+ 6,86	3+ 5,28
234,4	4+ 1,05	3+59,67	3+56,39
240,0	4+ 3,70	4+ 2,59	3+59,20
321,0	4+48,30	4+41,89	4+36,63
340,0	5+ 0,00	4+50,50	4+44,70

Изъ этого сравненія ясно видно, что замедленія вообще малы, но что они гораздо болѣе, чѣмъ по Ньютоновой теоріи. и различіе опыта съ этою теоріею такъ же почти велико, какъ и различіе во временахъ паденія въ пустотѣ и воздухѣ по Ньютонову представленію. Такъ вмѣсто 4″,745, которые требуетъ паденіе въ пустотѣ для прохожденія 340′, и вмѣсто 4,842 секундъ, которые требуетъ теорія Ньютона, опытъ далъ 5,000 секундъ. Такъ какъ разность даже на предѣльной высотѣ мала, то невольно рождается вопросъ о томъ: нѣтъ ли въ опытахъ погрѣшностей неустраненныхъ и постоянныхъ? Или только въ теоріи Ньютона, особенно приложенной къ столь большимъ скоростямъ. какъ здѣсь, кроется вся причина несогласій? Вмѣсто подробнаго уясненія, которое легко сдѣлать, сличая данныя Бенценберга съ другими подобными, гдѣ скорости были также значительны, мы приведемъ сперва слова самого автора объ этомъ предметѣ, а потомъ сдѣлаемъ изъ его данныхъ выводы, касающіеся закона сопротивленія.

Бенценбергъ. на стр. 186 своего сочиненія. говоритъ. что онъ привелъ всѣ опыты, кромѣ тѣхъ, гдѣ уже явно были большія отступленія, но такихъ не болѣе 1-го на 8-мь, вообще-же, продолжаетъ онъ. «мои опыты не достигли еще той точности, какой можно достичь съ часами, дающими терціи. Плотность моихъ шаровъ не была прямо опредѣлена, шары послѣ многократнаго паденія часто значительно уже измѣнили свою шаровую форму, манометра я не примѣнялъ, барометръ и термометръ наблюдалъ въ день одинъ разъ, при разсчетѣ ихъ показанія не приняты во вниманіе, плотность воздуха принята въ 800 разъ менѣе воды по показанію барометра, который я наблюдалъ въ церкви, разность плотностей воздуха вверху и внизу башни въ разсчетъ не принята, хотя еще Ла-Гиръ указывалъ, что въ опытахъ Маріотта это слѣдовало сдѣлать. Когда вновь начнутъ подобные опыты, не для того, чтобы разрушить (теорію), а чтобъ возводить—все это надо принять во вниманіе». Эти слова Бенценберга ясно показываютъ то совершенно добросовѣстное отношеніе, какое имѣлъ Бенценбергъ къ своему дѣлу, но, читая ихъ, не должно, изъ за словъ скромнаго автора, упускать изъ вида, что точность имъ достигнутая много превосходитъ ту, которая была свойственна предшествующимъ опы-

тамъ, и даже до сихъ поръ ничего равнаго его опытамъ нѣтъ по полнотѣ наблюденій, связанной съ точностію [1]). Въ этомъ убѣдитъ, надѣюсь, читателей знакомство съ дальнѣйшими опытами, касающимися того же предмета. Если о чемъ можемъ нынѣ особенно сожалѣть, такъ это о томъ, что въ опытахъ Бенценберга взяты были шары несовершенно одинаковые [2]), невзвѣшенные и слишкомъ тяжелые, а потому падающіе чрезъ-чуръ быстро; но это ему нужно было для его главной цѣли – опредѣленія уклона падающихъ тѣлъ отъ вертикальной линіи.

Для того, чтобы подвергнуть данныя Бенценберга разсчету, мы, вопервыхъ, дѣлаемъ переводъ высотъ на метрическую систему и терцій на секунды, во-вторыхъ, находимъ разности N между $\frac{g}{2}$ (гдѣ g есть дѣйствующее ускореніе тяжести) и $\frac{h}{t^2}$. Эти послѣднія разности N показываютъ мѣру отступленія отъ равномѣрно-ускореннаго движенія, потому что для него $\frac{g}{2} = \frac{h}{t^2}$. Этотъ пріемъ даетъ возможность прямо видѣть степень правильности полученныхъ чиселъ. Необходимо знать однако g. Напряженіе тяжести въ пустотѣ для Гамбурга около $G = 9{,}814$. Плотность сплава, содержащаго $90^0/_0$ свинца и $10^0/_0$ около 10,700, а плотность воздуха около 1,21, потому что среднее давленіе около 28,″1=760,2 мм., а средняя темпер. около 16° Ц. На основаніи этого дѣйствующее ускореніе g=9,813, а потому:

$$N = 4{,}9065 - \frac{h}{t^2}$$

Рядомъ приводимъ значенія $\frac{h}{gt^2}$, служащія для разсчета координатъ кадоиды.

Данныя Бенценберга:

	Высоты. Метры:	Времена. Секунды.	Отступленія или величины N.	Полосы N
1)	$h =$ 8.051	$t = 1{,}285$	$N = 0{,}0307\frac{h}{gt^2} =$	0,4969
2)	21,992	2,146	0,1311	0.4866
3)	46,776	3,116	0,0899	0,4909
4)	76,142	4,017	0,1878	0,4809
5)	77,962	4,062	0,1815	0,4815
6)	104,273	4,805	0,3903	0,4602
7)	110,445	5,000	0,4887	0,4502

[1]) Лучшихъ результатовъ можно конечно достичь, но пользуясь региструющими хронографами, записывающими малыя разности времени. Такіе опыты очень желательны, и если позволитъ мнѣ время и средства, я ихъ предполагаю произвести.

[2]) На стр. 188 даны діаметры 10-ти употребленныхъ шаровъ, они суть: 1,7; 1,5; 1,49; 1,61; 1,53; 1,59; 1,6; 1,49; 1,6; 1,48 англійскихъ дюймовъ. Среднее=1,56 англ. дюйм.=1,46 париж. дюймовъ. Сѣченіе наименьшаго (1,48) относится къ сѣченію наибольшаго (1,7) такъ, какъ 1:1,32. Отъ одной этой причины въ сопротивленіи должна быть погрѣшность около $16^0/_0$.

Порядокъ въ найденныхъ изъ опыта величинахъ N, какъ видимъ, не отвѣчаетъ порядку по h и t, особенно на 2-й высотѣ [1]) 67,7 футъ или 22 метра. Это показываетъ, что при маломъ времени и разстояніи, то есть въ двухъ первыхъ наблюденіяхъ, нѣтъ полной увѣренности, а потому для полученія вывода слѣдуетъ пользоваться только послѣдними пятью данными, гдѣ время и пространство больше и вліяніе погрѣшностей уменьшено. Особенную цѣну имѣетъ вышеприведенное третье наблюденіе; 4-е и 5-е наблюденія близки между собою, и, такъ сказать, одно подтверждаетъ другое. Что же касается до 6-го и 7-го наблюденій, то можно думать, что по крайней мѣрѣ въ одномъ изъ нихъ есть невѣрность. Дѣйствительно оба разстоянія разнятся на 6,172 метровъ, а времена на 0,195 секундъ, то есть, еслибы скорость здѣсь считать равномѣрною, то она равна 31,6 метровъ, тогда какъ въ промежуткѣ отъ 5-го до 6-го разстоянія она была уже равна 35,6 метровъ, и даже между 3-мъ и 4-мъ разстояніями средняя скорость достигала 32.6 метровъ. Тѣмъ не менѣе, не имѣя основанія предпочесть однихъ данныхъ (6 или 7) другимъ, мы разсчитываемъ всѣ 5-ть послѣднихъ данныхъ, пользуясь координатами кадоиды:

Нумеръ опыта.	$\frac{gh}{(gt)^2}$	α или $\frac{gt}{c}$	c метры.	k килогр.
3	0,4909	0,335	91,3	0,0287
4	0,4809	0,495	79,6	0,0377
5	0.4815	0,485	82,2	0,0354
6	0,4602	0,740	63,7	0,0589
7	0,4502	0,840	58,4	0,0701

Для вычисленія, по найденному значенію скорости c, значенія k, служили слѣдующія данныя: діаметръ шаровъ=1,46 париж. дюйм. = 0,0405 м., а потому сѣченіе M = 0,001288, объемъ = 0,00003474 куб. м., а вѣсъ p=0,372 кило, такъ какъ плотность= 10,7, величина же $\Delta = 1{,}21$, какъ сказано выше. Слѣдовательно $k = \frac{239{,}2}{c^2}$. Еслибы законъ сопротивленія и величина k были здѣсь тѣже, что и въ опытахъ Ньютона, т. е. $k = 0{,}027$ въ I формулѣ, то предѣльная скорость была бы $= \sqrt{\frac{p}{k\Delta M}} = 94{,}05$ м., а судя по послѣднимъ даннымъ, она не болѣе 58. Такъ какъ k растетъ здѣсь съ возрастаніемъ разстоянія или скорости, то все явленіе представляется въ слѣдующемъ видѣ: при началѣ паденія, когда скорости были такія же малыя, какъ у Ньютона, сопротивленіе здѣсь

[1]) Особую неправильность этого опыта видитъ и Бенценбергъ. Онъ говоритъ на стр. 167 по этому поводу, что вѣроятное объясненіе должно искать въ томъ, что въ этомъ одномъ наблюденіи между отдѣльными опытами часы ставились на каменный подоконникъ, другіе разы на дерево, а потому на этотъ разъ сильнѣе другихъ разовъ часы охлаждались, особенно пружина, а отъ то о ходъ становился скорѣе.

было вѣроятно также, какъ у него, около, $k=0{,}027$. Когда же скорости стали расти отъ единицъ до десятковъ метровъ и приближаться къ 40 — 50 метрамъ въ секунду—сопротивленіе стало быстро возрастать и притомъ въ такой мѣрѣ, какъ не ростетъ оно при переходѣ отъ скоростей въ 0,2 до 2,0 метровъ. Между 4 и 5 секундами средняя скорость около 35 метровъ, и данныя Бенценберга даютъ поводъ думать, что тогда сопротивленіе возрастаетъ очень быстро. Но возрастаніе сопротив. со скоростію начинается и раньше, потому что около $t=4''$ скорость уже близка къ 30 м. и k больше, чѣмъ у Ньютона, гдѣ скорости не выше 10 метровъ. Поэтому можно думать, что разность κ въ опытахъ Ньютона и Бенценберга зависитъ только отъ разности скоростей. Таковъ предположительный выводъ изъ данныхъ Бенценберга, но не надо доказывать, что дѣло не вполнѣ ясно еще ни со стороны точности наблюденій, ни со стороны вліянія разрѣженія, происходящаго сзади быстро двигающагося тѣла, ни со стороны тренія и др. обстоятельствъ, могущихъ измѣнять направленіе сужденія. Только тогда, когда будетъ извѣстная сумма такихъ же наведеній, какое представляютъ опыты Бенценберга, можно будетъ съ увѣренностію рѣшить вопросъ объ измѣненіи сопротивленія съ перемѣною скоростей. Одно несомнѣнно: коэффиціентъ k, найденный изъ данныхъ Ньютона для малыхъ скоростей, негоденъ для большихъ, если все сопротивленіе и тогда выражать $R=k\Delta Mv^2$.

Съ опытами Бенценберга сходны наблюденія **Рейха**, хотя онъ не дѣлалъ опредѣленій на разныхъ высотахъ, а наблюдалъ времена только отъ начала до конца паденія. За то у него были шары разной плотности. Отчетъ объ его послѣдованіяхъ изложенъ въ особой брошюрѣ: «Fallversuche über die Umdrehung der Erde», von Reich. Freiberg, 1832. Обставленныя, произведенныя и поправленныя со всею возможною тщательностію и выраженныя метрически опредѣленія Рейха дали слѣдующіе результаты:

	Исправленное время паденія терціи.	Число опытовъ	Высота паденія; метры.	Діаметръ шаровъ; миллим.	Вѣсъ въ грамм. [3])	Плотность.
1) Бол. оловянные шары [1])	357,78 ± 0,72	(42)	158,4265	40,34	270,40	7,878
2) Мал. оловянные шары	361,11 ± 0,51	(36)	158,0843	35,59	190,00	8,028
3) Свинцовые шары	355,85 ± 0,53	(25)	158,4118	35,41 [2])	270,27	10,603
4) Бол. костяные шары	407,91 ± 0,89	(6)	158,4500	36,64	46,24	1,790
5) Мал. костяные шары	421,10 ± 0,61	(11)	158,4503	28,56	22,32	1,811

[1]) Сплавъ олова съ 10% висмута, 2% свинца. Для полученія средняго времени Рейхъ бралъ всѣ данныя, за исключеніемъ тѣхъ, которыя завѣдомо были плохи; число взятыхъ данныхъ показано далѣе въ скобкахъ.

[2]) Для этихъ шаровъ у Рейха не данъ діаметръ, а потому его пришлось разсчитать, по вѣсу и плотности.

[3]) У Рейха говорится «absolute Gewicht», но едва ли его вѣсъ въ пустотѣ; слово «absolute» здѣсь, повидимому, только противоположеніе съ тотчасъ слѣдующимъ выраженіемъ «specifisches Gewicht». Мы принимаемъ его поэтому за p вѣсъ въ воздухѣ, а не за P, т. е., не за вѣсъ въ пустотѣ.

Рейхъ принимаетъ для Фрейберга, около котораго дѣланы опыты, ускореніе тяжести въ пустотѣ=9,80986 метра. Среднее стояніе барометра 317.58 пар. линій, относительная влажность 93,4% средняя температура 13°,2 Ц. Всѣ эти числа получены по наблюденіямъ въ той самой шахтѣ (Drei Brüderschachte bei Freiberg, въ Саксоніи), гдѣ дѣлались опыты. Отсюда Рейхъ вычисляетъ $\Delta = 1{,}1550$ кило, что близко къ дѣйствительности, хотя разсчетъ основанъ на допущеніи мало-точнаго вѣса (1,299) куб. метра воздуха и его коэф. расширенія $\left(\frac{3}{800}\right)$. Принимая данныя Реньо [1]), имѣемъ $\Delta = 1{,}154$, потому что высота барометра = 716,4 мм. (считая, что онъ уже самимъ Рейхомъ приведенъ къ 0°, что, однако, не извѣстно изъ мемуара), а упругость водянаго пара = 11,06. 0,934 = 10,3 мм., высота мѣста надъ уровнемъ океана, какъ даетъ Рейхъ, 475 м., слѣдовательно, высота въ срединѣ пути = 475 — 79 = 397 м., а географическая широта мѣста 50° 33′, вслѣдствіе чего куб. метръ воздуха при 760 мм. давл. и при 0° вѣситъ на этой широтѣ и высотѣ 1,290 кило.

При разсчетѣ данныхъ Рейха, я избѣгаю всякихъ сокращеній, какія допускалъ въ предшествующихъ разсчетахъ, и поступаю слѣдующимъ образомъ. Сперва разсчитываю для каждаго опыта соотвѣтственное g, потомъ gh и gt (t выражено здѣсь секундами, а не терціями), а затѣмъ по значенію $\frac{gh}{(gt)^2}$ и по координатамъ кадоиды находилъ соотвѣтственное α и предѣльную скорость $c\left(\alpha = \frac{gt}{c}\right)$, которая даетъ возможность, зная $\frac{p}{\Delta M}$, узнать величину k. Привожу эти подробности, потому что данныя Рейха суть лучшія изъ всѣхъ до сихъ поръ извѣстныхъ.

	Дѣйствит. ускореніе; метры. g.	gh	gt	$\frac{gh}{(gt)^2}$ или y	α по кадоидѣ.	Предѣльная скорость c; метры.	$\frac{p}{\Delta M}$	Значеніе k.
1)	9,8084	1553,91	58,488	0,45426	0,8004	73,07	183,34	0,03434
2)	9,8084	1550,55	59,026	0,44506	0,8920	66,17	165,50	0,03780
3)	9,8088	1553,83	58.174	0,45915	0,7500	77,57	237,82	0,03953
4)	9,8035	1553,37	66,649	0,34969	1,8026	36,97	38,01	0,02781
5)	9,8036	1553,38	68,805	0,32813	2,0349	38,81	30,19	0,02641 [2])

[1]) Полный разсчетъ подобнаго рода данъ въ моемъ сочиненіи «О барометрическомъ нивеллированіи», 1876 г.

[2]) Среднее изъ всѣхъ значеніе k=0,0331. Судя по реферату (Forschritte der Physik. 1865, p. 80, подлинникъ мнѣ неизвѣстенъ) о статьѣ J. F. W. Gronau, касающейся разсчетовъ по гиперболическимъ формуламъ, онъ вывелъ изъ опытовъ Ньютона $\delta = 0{,}51175$, Рейха $\delta = 0{,}63728$ и Бенценберга $\delta = 0{,}63191$. Такъ какъ у него δ равно $2gk$ (по Ньютоновой теоріи $\delta = \frac{1}{4}$), то по разсчету Gronau результатъ Рейха $k = 0{,}0325$, что близко къ нашему среднему, но разсчетъ Бенценберга, вѣроятно, какъ либо измѣненъ, потому

Изъ данныхъ Рейха видно, что такіе тяжелые шары, какъ въ № 1, 2 и 3, падая съ высоты 158 метровъ со среднею скоростію около 26 метровъ и представляющіе предѣльную скорость около 70 метровъ, имѣютъ коэффиціентъ сопротивленія около $k=0.038$, но отнюдь не такой большой (до 0,06 и даже 0,07), какъ оказалось въ опытахъ Бенценберга. А такъ какъ у него даже и высоты были меньше, чѣмъ у Рейха, и, слѣдовательно, и скорости меньшія, то выводъ изъ опытовъ Бенценберга (сопротивленіе очень сильно и быстро растетъ съ возрастаніемъ скорости) не находитъ подтвержденія въ данныхъ Рейха, опыты котораго внушаютъ во всякомъ случаѣ больше довѣрія, такъ какъ обставлены полнѣе и ведены лучше, чѣмъ опредѣленія Бенценберга. Но, однако, въ опытахъ Рейха оказалось, что костяные шары, достигающіе предѣльной скорости около 35 метровъ, при средней скорости паденія= 7 метровъ и при высотѣ 158 м., дали сопротивленіе меньшее, чѣмъ металлическіе шары, изъ чего слѣдуетъ, что все-таки при меньшей скорости сопротивленіе въ среднемъ меньше. Притомъ для этихъ шаровъ величина k получилась близкою къ той (0,027), которую даютъ опыты Ньютона въ водѣ и воздухѣ, а потому надо думать, что при скорости, даже достигающей до 30 м. въ секунду, сохраняется еще тотъ же коэфф. сопротивленія, какой получается при скоростяхъ меньшихъ метра. И только при скоростяхъ большихъ, чѣмъ 30—40 метровъ, значеніе k возрастаетъ. Выводъ этотъ, правда, предварительный и требующій провѣрки, согласуется съ данными Ньютона, Бенценберга и Рейха; а такъ какъ кромѣ этихъ нѣтъ другихъ опытовъ паденія въ воздухѣ, то для обыкновенныхъ случаевъ паденія шарообразныхъ тѣлъ въ воздухѣ, когда скорости не превосходятъ, а меньше 30 м. въ секунду, можно съ большею увѣренностію примѣнять постоянный коэфф. сопротивленія, близкій къ

$$k = 0{,}027 \text{ или около } \frac{2}{75}.$$

Примѣняя его, называя чрезъ d плотность шара и пользуясь уравненіемъ $p = k\Delta Mc^2$, имѣемъ для воздуха, когда $\Delta = 1{,}2$:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 d = 0{,}027\pi r^2 c^2.$$

что его числа даютъ въ среднемъ гораздо большее сопротивленіе, чѣмъ разсчитанное Gronau, по которому $k = 0{,}0322$. Быть можетъ, однако, что для вывода своего средняго Gronau принялъ во вниманіе, такъ называемый, вѣроятный *вѣсъ* каждаго результата, чего я не дѣлалъ ни здѣсь, ни во всемъ дальнѣйшемъ изслѣдованіи, потому что не считаю еще опыты надъ сопротивленіемъ ни достаточно многочисленными, ни довольно совершенными, чтобы приложить къ ихъ разсчету, такъ сказать, полную геометрическую точность. То время, которое потратится на такіе разсчеты, ничѣмъ не вознаградится и будетъ лучше, если оставить его для личнаго знакомства съ явленіями сопротивленія, что я и дѣлаю, насколько мнѣ позволяютъ другія мои занятія.

а потому можно принять:

$$c^2 = 50rd\ ^1).$$

Опыты Рейха (1832) я описалъ тотчасъ послѣ опытовъ Ньютона (1719) и Бенценберга (1804) только потому, что между ними видно большое сходство, связь и явное усовершенствованіе методовъ. Исторически же слѣдовали раньше опытовъ Рейха опыты надъ паденіемъ тѣлъ въ водѣ, сдѣланные въ 1811—1815 гг. **шведскими учеными** P. Lagerhjelm, J. H. af. Forselles и G. S. Kallstenius.

Подлинный отчетъ объ опытахъ этихъ ученыхъ мнѣ, не смотря на всѣ усилія получить его, остался неизвѣстенъ. Судя по позднѣйшей работѣ Лагерхельма «Tentamen theorie resistentiae fluidorum constituendae» 1830, въ «Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsalensis» (Vol. X pag 18), сочиненіе это носитъ названіе «Hydrauliska Försök, an ställda vid Falu grufva aren 1811—1815. Första delen Stockholm 1818». Оно касается опытовъ, произведенныхъ въ Фалунѣ надъ сопротивленіемъ моделей, опредѣляемымъ способомъ тяги, и надъ паденіемъ тѣлъ въ водѣ. Подробный отчетъ объ этихъ опытахъ данъ въ «Kastner's Archiv für die gesammte Naturlehre», X 79—112 и XI—305. Только послѣдній томъ этого сочиненія я нашелъ въ доступныхъ мнѣ библіотекахъ, и онъ-то содержитъ описаніе опытовъ надъ паденіемъ тѣлъ въ водѣ. Болѣе сжатый рефератъ о тѣхъ же шведскихъ опытахъ помѣщенъ въ «Gehler's Physikalisches Wörterbuch», X (1842), стр. 1838.

Шведскіе ученые производили свои опыты въ квадратномъ сосудѣ 29 футовъ (шведскихъ) высотою со сторонами 1,583 фута. Такъ какъ сосудъ пропускалъ воду, то приходилось ее приливать. На разстояніяхъ 7,8; 15,8 и 26,4 фута отъ центра погруженнаго тѣла сдѣланы въ стѣнкахъ сосуда окна и переднее изъ нихъ столь малое, что видны были падающія тѣла только тогда, когда паденіе было вертикально. Для каждаго изъ падающихъ шаровъ опредѣлялось положеніе центра тяжести. Для этого шаръ покрывался воскомъ, погружался въ сѣрную кислоту, на которой плавалъ, и на верхней точкѣ клалась мѣтка. На это мѣсто затѣмъ приклеивалось лакомъ ушко и на немъ, при помощи шелковины, погружалось тѣло въ воду, такъ что центръ тяжести и фигуры были на вертикальной оси сосуда, а потому при паденіи послѣ разрѣза нити не было вращенія и уклона въ сторону. Шары были изъ олова или дерева и въ послѣднемъ случаѣ пропитаны масломъ, покрыты лакомъ и полированы. Діаметры горизонтальный и вертикальный отличались у перваго шарика на 0,0015, у втораго на

---

[1]) Напр. дождевыя капли радіуса = 1 миллиметру получатъ въ воздухѣ предѣльную скорость около 7 м. въ секунду, дробинки того же радіуса (d=11000) около 22 метровъ. Подобные опыты могли бы быть, кажется, выполнены съ легкостію въ шахтахъ или съ аэростата. Впрочемъ, неизвѣстно, не мѣняется ли k при маломъ діаметрѣ (стр. 102).

0,0010 фута, въ таблицѣ даны горизонтальные діаметры. Полученныя для 10-ти взятыхъ шариковъ числа [1]) и вытекающій изъ данныхъ коэффеціентъ k (по метрич. системѣ) приведены въ таблицѣ.

	Плотность, считая воду = 1000.	Діаметръ. Шведскіе футы.	Время отъ начала паденія на разстояніи:		Скорость въ этомъ промежуткѣ, футы.	Коэфф. сопротивленія k, по (c).
		D.	15,8 ф.	26,4 ф.	v	
1	$d =$ 1634,4	0,29594	4,00 сек.	7,00 сек.	3,53	0,0339
2	1396,0	0,28708	5,357 »	9,055 »	2,86	0,0312
3	1174,0	0,28432	9,00 »	14,00 »	2,12	0,0247
4	1139,7	0,28432	10,2.. »	.5,75 »	1,93	0,0240
5	1058,1	0,28948	15,25 »	24,75 »	1,12	0,0301
6	1065,3	0,28948	14,57 »	24,14 »	1,11	0,0345
7	1071,35	0,39844 [2])	12,66 »	21,66 »	1,18	0,0459
8	1124,7	0,20326	12,00 »	19,33 »	1,45	0,0271
9	1088,9	0,10034	17,20 »	29,+ »	0,90	0,0248
10	1402,1	0,10034	9,125 »	15,50 »	1,66	0,0329
					средн.	0,0309

Для разсчета послѣдняго столбца служили мнѣ слѣдующія соображенія. Мы уже увидѣли выше (стр. 123), что наиболѣе полезные результаты можно извлечь изъ опытовъ паденія тогда, когда тѣло достигло почти равномѣрной скорости. Шары въ опытахъ шведскихъ ученыхъ достигли послѣ 15,8 ф. такой скорости, съ точностью доступною въ предѣлахъ погрѣшностей наблюденія, потому что даже для наиболѣе быстро падающаго шара (1-го) скорость осталась почти таже въ первомъ и во второмъ промежуткѣ. Дѣйствительно первые 15,8 футовъ пройдены первымъ шаромъ со среднею скоростію $\frac{15,8}{4}$ — 3,95, а послѣдніе 10,6 футъ со скоростью 3,53 фута. Она здѣсь, и во многихъ другихъ опытахъ (напр. въ 7-мъ), вышла въ концѣ паденія даже меньшею, чѣмъ при началѣ. Это указываетъ на неточность опытовъ и вѣроятно зависитъ отъ неточности въ опредѣленіи момента начала паденія. Это обстоятельство укрѣпляетъ увѣренность въ томъ, что должно

[1]) Приводимъ только тѣ случаи, когда шары падали свободно, а тотъ случай (шаръ такой-же, какъ въ № 6), когда по діаметру было сдѣлано отверстіе и шаръ падалъ по вертикально натянутой проволокѣ, не приводимъ, потому что треніе замедлило здѣсь паденіе на 2,7 секунды для 26,4 футовъ разстоянія.

[2]) Едвали здѣсь не должно быть 0,29844, то есть едва ли здѣсь не опечатка? Если такъ, то k=0,0344. Впрочемъ въ отчетѣ объ опытахъ замѣчено, что въ № 7 шаръ прибылъ въ вѣсѣ на 0,0796 лота.

избѣгать разсчета, основаннаго на наблюденіяхъ отъ начала паденія и руководствоваться данными для послѣдняго промежутка, когда скорость стала уже равномѣрною. Въ предпослѣднемъ столбцѣ даны скорости v въ футахъ. Такъ какъ шведскій футъ = 0,2966 метра. то предѣльная скорость

$$c = v\ 0{,}2966 \text{ метровъ}.$$

Для разсчета по формулѣ (*c*) величины k должно знать кромѣ того p, M и Δ въ метрической системѣ. Такъ какъ:

сѣченіе шара: $M = \pi \frac{1}{4} D^2$ $(0{,}2966)^2$ кв. метровъ.

вѣсъ въ водѣ: $p = \frac{1}{6} \pi D^3$ $(0{,}2966)^3$ (d—1000) килограммовъ,

плотность воды: $\Delta = 1000$,

то по метрич. системѣ коэфф. сопротивленія:

$$k = \frac{p}{\Delta M c^2} = 0{,}002248 \frac{D}{v^2} \quad (d-1000).$$

Такъ разочтены числа послѣдняго столбца.

Какъ общее среднее, такъ и сличеніе отдѣльныхъ данныхъ, показываютъ малую точность опытныхъ данныхъ разбираемыхъ опредѣленій. Достаточно указать на то, что въ 5 и 6-мъ опытахъ, при шарѣ того же діаметра, у тяжелѣйшаго вышла меньшая предѣльная скорость, чѣмъ у болѣе легкаго, хотя начальныя скорости вышли такими, какими ихъ должно ждать. Особенно же важно замѣтить, что опыты № 1 и № 6 указаны какъ наилучшіе авторами, и для нихъ вышло k около 0,034, то есть гораздо больше, чѣмъ во всѣхъ предшествующихъ подобныхъ опредѣленіяхъ, дающихъ k около 0,027. Увеличеніе коэф. сопротивленія, замѣчаемое въ общемъ результатѣ шведскихъ опытовъ, должно приписать тому, что взятый сосудъ имѣлъ малые поперечные размѣры. Большинство шаровъ имѣло діаметръ около 0,28 ф., а сосудъ 1,58 ф., то есть отношеніе размѣровъ = 1 : 5,6; такое отношеніе вѣроятно было мало, и близость стѣнокъ, вѣроятно, увеличивала сопротивленіе. Это видно изъ того, что для наибольшаго шара (7-й) получилось значеніе k наибольшее. Но и съ этой стороны шведскіе опыты не даютъ точныхъ чиселъ, потому что при томъ же радіусѣ шаровъ значенія k вышли весьма различными, даже тогда, когда діаметръ былъ малъ и скорости не сильно отличались, какъ въ опытахъ 9-мъ и 10-мъ, которые дали для большей скорости большій k, чего нѣтъ въ другихъ опытахъ, напр. въ опытахъ 3-мъ и 6-мъ, и даже въ наилучшихъ опытахъ 1-мъ и 6-мъ вышло обратное.

Такимъ образомъ шведскіе опыты несомнѣнно заключаютъ въ себѣ большія погрѣшности, не меньшія напримѣръ, чѣмъ въ опытахъ Ньютона для тѣлъ, падающихъ въ водѣ (стр. 145), и если мы привели отчетъ о шведскихъ опытахъ, то не ради ихъ точности, а ради того, чтобы показать, что ихъ нельзя приводить для доказательства невѣрности или справедливости какихъ либо предполо-

женій или выводовъ [1]), и еще для того, что въ этихъ опытахъ въ первый разъ были взяты, кромѣ шаровъ, два тѣла иныхъ формъ. Въ опытѣ 11-мъ взятъ деревянный цилиндръ, высоты 0,2 фута. На передней, то есть нижней, грани цилиндра былъ насаженъ конусъ съ угломъ $= 27^{\circ}$, а задняя, т. е. верхняя, грань осталась плоскою. Въ 12-мъ опытѣ былъ взятъ точно такой же цилиндръ съ конусомъ, только сзади былъ насаженъ конусъ въ 52°. Эти два тѣла имѣли, значитъ, одинъ и тотъ же носъ и одинъ корпусъ, только различались кормою. Здѣсь наблюденія сдѣланы на трехъ разстояніяхъ отъ начала паденія: $h_1=7{,}8$ ф., $h_2=15{,}8$ и $h_3=26{,}4$

11)	d=1344,96	D=0,17967	$t_1=2{,}25$	$t_2=5{,}0$	$t_3=8{,}6$
12)	1189,9	0,17455	2,6	6,0	9,25

Для 11-го опыта средняя скорость отъ 0 до $h_1 = 3{,}47$, отъ h_1 до $h_2 — 2{,}91$, а въ послѣднемъ промежуткѣ отъ h_2 до $h_3 = 2{,}94$ ф. Считая эту послѣднюю за предѣльную, можно вычислить k, но довѣрять ему нельзя, потому что скорости измѣняются невѣрно, какъ и для 2-го опыта, гдѣ онѣ суть: 3,00; 2,36 и 3,26 ф. Одно очевидно, что при одинаковыхъ радіусахъ, сопротивленіе для шара гораздо больше, чѣмъ для цилиндра, у котораго передняя часть представляетъ конусъ въ 26°; вліяніе же кормы остается здѣсь неяснымъ, потому что для 12-го опыта всѣ времена больше, чѣмъ для 11-го, а потому должно было бы ждать, что скорость 12-го меньше, чѣмъ у 11-го, а конечная скорость вышла, наоборотъ, для 12-го большею, чѣмъ для 11-го. Всякій выводъ изъ подобныхъ опредѣленій будетъ сомнителенъ. Причину ошибокъ вѣроятнѣе всего составляетъ различіе впечатлительности трехъ наблюдателей, участвовавшихъ въ опытѣ. Они были въ трехъ точкахъ и отдѣльно замѣчали времена начала паденія или прохожденія. Личныя ошибки отчета временъ были вѣроятно очень различны, а потому въ результатѣ и не было согласія. Очевидно, что для точности опытовъ, необходимо или одному наблюдателю дѣлать всѣ отчеты (что возможно, когда движеніе медленно) или, что гораздо надежнѣе, устроить опыты такъ, чтобы времена отмѣчались механически (регистрировались), потому что тогда въ результатѣ примутъ участіе только постоянныя ошибки приборовъ, большинство которыхъ можетъ быть точно опредѣлено. При томъ въ той разности временъ, которая нужна для разсчета, большинство ошибокъ этого рода уничтожается. Такихъ то опытовъ надъ паденіемъ тѣлъ въ водѣ и воздухѣ до сихъ поръ нѣтъ почти вовсе или, правильнѣе, нѣтъ достаточно систематическихъ, направленныхъ къ опредѣленію сопротивленія.

[1]) Такъ авторы выводятъ, что сопротивленіе шара равно половинѣ сопротивленія площади большаго круга (какъ Ньютонъ думалъ), что треніе, вѣроятно, не зависитъ отъ скорости, что сопротивленіе пропорціонально скорости, взятой въ степени 2,377 и т. п. Всѣ эти выводы невѣрны, судя по совокупности всѣхъ другихъ опытныхъ изслѣдованій.

12 Апр. 1880 г.

Приложеніе 1-ое.

ТЕОРІЯ СОПРОТИВЛЕНІЯ НЬЮТОНА

(Составилъ, по Newtoni Phylosophiae Naturalis Principia Mathematica, Н. Ѳ. Іорданскій).

Теорія сопротивленія, представляемаго жидкими и газообразными тѣлами движущемуся въ нихъ твердому тѣлу, развита Ньютономъ во второй книгѣ его знаменитаго сочиненія: Phylosophiae naturalis principia mathematica [1]). Первыя три главы (sectiones) этой книги представляютъ исключительно кинематическій характеръ и посвящены изслѣдованію движенія тѣлъ подъ вліяніемъ сопротивленія пропорціональнаго первой, степени скорости (Sectio I), второй степени (Sectio II) и частью первой частію второй (S. III), независимо отъ причинъ, производящихъ подобные роды сопротивленія. Тѣмъ не менѣе, уже въ концѣ первой главы Ньютонъ замѣчаетъ, что гипотеза, предполагающая сопротивленіе пропорціональнымъ первой степени скорости, имѣетъ лишь математическое значеніе и мало отвѣчаетъ опыту. Въ срединахъ совершенно лишенныхъ твердости (in mediis quae rigore omni vocant) сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости (Liber II. Propositio IV. Scholium). Выводу и развитію этого закона посвящена вся 7 глава второй книги.

Ньютонъ развиваетъ здѣсь двѣ теоріи сопротивленія—одну для жидкостей упругихъ, какъ напр. воздухъ, другую для сплошныхъ жидкостей, какъ вода, спиртъ и пр. Первая основана на свойствахъ удара тѣлъ; вторая — выводитъ законъ сопротивленія на основаніи истеченія жидкостей. Мы разсмотримъ въ отдѣльности обѣ эти теоріи.

А) Сопротивленіе въ жидкостяхъ упругихъ.

При опредѣленіи сопротивленія въ упругихъ жидкостяхъ Ньютонъ разсматриваетъ жидкость какъ такую среду, которой частицы равны между собою, чрезвычайно малы, совершенно отдѣлены другъ отъ друга и находятся на равныхъ между собою разстояніяхъ; никакія силы между

[1]) Phil. natur. princ. math. Editio tertia 1726.

ними не дѣйствуютъ (medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus constat. Propos. XXXIV et XXXV). Когда твердое тѣло движется въ такой средѣ, то ударяется о частицы ея и сообщаетъ имъ нѣкоторое количество движенія. Ударъ каждой частицы происходитъ совершенно независимо отъ окружающей среды, т. е., частица, получивъ извѣстное количество движенія, сохраняетъ его неопредѣленно долгое время, не испытывая никакого измѣненія со стороны окружающихъ частицъ и не производя на нихъ никакого дѣйствія. По замѣчанію D'Alembert'a, она какъ бы совершенно уничтожается (Traité de l'equilibre et de mouvement des fluides, Libre 3, corol V). На основаніи третьяго закона движенія—дѣйствіе равно и противоположно противодѣйствію—тѣло испытываетъ со стороны частицъ давленіе или сопротивленіе, равное той силѣ, съ какою оно само дѣйствуетъ (Propos. XXXIII, corol 6).

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что потребно тоже усиліе, чтобы двигать тѣло въ спокойной жидкости съ данною скоростію, или—чтобы удерживать тѣло неподвижнымъ, когда жидкость двигается около него съ тою же скоростію (Prop. XXXIV).

Кромѣ того Ньютонъ допускаетъ, что треніе частицъ о поверхность тѣла не оказываетъ вліянія на величину сопротивленія; такъ что при косвенномъ направленіи частичныхъ ударовъ, т. е., въ томъ случаѣ, когда поверхность движущагося тѣла не перпендикулярна къ направленію движенія, можно пренебречь тою составляющею силы ударовъ, которая параллельна поверхности тѣла. И далѣе,—сопротивленіе зависитъ только отъ передней части тѣла; вліяніе задней кормовой части оставляется безъ вниманія.

Отсюда слѣдуетъ:

1) Что сопротивленіе, испытываемое цилиндромъ, не зависитъ отъ длины цилиндра и равняется сопротивленію круга, описаннаго тѣмъ же радіусомъ и движущагося перпендикулярно своей плоскости.

2) Что сопротивленіе для шара вдвое менѣе, нежели для цилиндра. (Propos. XXXIV). Это послѣднее предложеніе мы докажемъ впослѣдствіи, а теперь обратимся къ опредѣленію абсолютной величины сопротивленія; и такъ какъ вся теорія основана на свойствахъ удара тѣлъ, то считаемъ не лишнимъ сказать нѣсколько словъ объ этомъ предметѣ.

Для нашей цѣли достаточно разсмотрѣть только простѣйшіе случаи удара.

Предположимъ, что ударяющіяся тѣла имѣютъ двѣ общія плоскости симметріи и движутся параллельно линіи пересѣченія этихъ плоскостей, не имѣя вращательнаго движенія. Это случай *прямаго* удара. Пусть OX (черт. 135) будетъ линія пересѣченія двухъ плоскостей симметріи. Обозначимъ M массу одного тѣла, V его скорость, направленную отъ O къ X. Пусть m и v масса и скорость другаго тѣла. Скорости будемъ принимать съ однимъ знакомъ, если оба тѣла движутся по одному направленію, и—съ разными знаками, если тѣла движутся на встрѣчу другъ другу. Скорость V тѣла M будемъ считать положительною, и пусть $V > v$. Скорости тѣлъ послѣ удара будемъ считать положительными или отрицательными, смотря по тому, имѣютъ ли онѣ одно направленіе съ V или противоположное ей. Какъ бы ни были тверды

разсматриваемыя тѣла, но при ударѣ оба они потерпятъ нѣкоторое сжатіе, при чемъ скорость одного изъ нихъ—въ нашемъ случаѣ V—будетъ уменьшаться, скорость другого увеличиваться, пока обѣ онѣ не сдѣлаются равными. Это—первый періодъ удара. Теперь необходимо различить нѣсколько случаевъ: можно предположить, что тѣла совершенно лишены упругости, или что они абсолютно упруги, или—обладаютъ нѣкоторою неполною упругостію.

Если оба тѣла совершенно лишены упругости, то ударъ оканчивается послѣ перваго періода. Тѣла сохраняютъ ту форму, какую они получили вслѣдствіе сжатія, и движутся какъ одно тѣло съ общею скоростію. Обозначимъ u эту скорость. Тѣло M потеряло вслѣдствіе удара количество движенія$=M(V-u)$; а тѣло m пріобрѣло количество движенія$=m(u-v)$. Эти количества должны быть равны между собою, т. е.,

$$M(V-u)=m(u-v)$$

Отсюда

$$1)\qquad u=\frac{MV+mv}{M+m}$$

Если $v=0$, т. е., тѣло m находилось въ покоѣ, и если масса m весьма мала относительно M, то u почти равно V.

Легко показать, что въ случаѣ удара неупругихъ шаровъ происходитъ потеря живой силы. Въ самомъ дѣлѣ, живая сила обоихъ тѣлъ до удара была равна

$$\tfrac{1}{2}MV^2+\tfrac{1}{2}mv^2$$

Послѣ удара

$$\tfrac{1}{2}(M+m)u^2$$

Вычитая послѣднее количество изъ перваго и подставляя величину u изъ уравненія 1), получаемъ

$$\frac{Mm(V-v)^2}{2(M+m)},$$

величину всегда положительную, какой бы знакъ ни имѣла скорость v.

Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда тѣла обладаютъ нѣкоторою степенью упругости. Первый періодъ удара и въ этомъ случаѣ происходитъ точно также, какъ въ случаѣ неупругихъ тѣлъ. Достигнувъ общей скорости, тѣла стремятся принять свою прежнюю форму, причемъ, во все то время, пока они находятся въ соприкосновеніи, скорость одного изъ нихъ, V, продолжаетъ уменьшаться, скорость другаго увеличиваться. Для случая абсолютной упругости предполагается, что вторая часть удара совершенно подобна первой, т. е., что тѣла, возвращаясь къ своей первоначальной формѣ, пріобрѣтаютъ или теряютъ количества движенія совершенно равныя тѣмъ, какія они пріобрѣли или потеряли въ теченіи перваго періода удара. Если же тѣла не обладаютъ абсолютной упругостію, то второй періодъ удара не будетъ совершенно подобенъ первому: пріобрѣтенныя или потерянныя количества движенія будутъ меньше, нежели въ первый періодъ. Обозначимъ μ количества движенія, потерянныя или пріобрѣтенныя въ теченіи перваго періода, т. е., положимъ

2) $$\mu = M(V-u) = m(u-v)$$

Очевидно, что послѣ перваго періода будемъ имѣть

$$Mu = MV - \mu$$

и

$$mu = mv + \mu.$$

Обозначимъ V_1 и v_1 скорости обоихъ тѣлъ при концѣ удара. Тогда

$$MV_1 = Mu - \varepsilon\mu$$

и

$mv_1 = mu + \varepsilon\mu$, гдѣ ε есть такъ называемый коэффиціентъ упругости или коэффиціентъ возстановленія.

ε есть величина положительная, вообще меньше единицы; только для тѣлъ абсолютно упругихъ $\varepsilon = 1$. Для тѣлъ совершенно неупругихъ $\varepsilon = 0$. Опредѣляя u изъ уравненія 1 и μ изъ ур. 2, получимъ

3) $$V_1 = \frac{MV + mv}{M + m'} - \varepsilon \frac{m(V-v)}{M+m}$$

$$v_1 = \frac{MV + mv}{M + m'} + \varepsilon \frac{M(V-v)}{M+m}.$$

Вычитая второе изъ перваго, находимъ

$$V_1 - v_1 = -\varepsilon(V-v).$$

Это уравненіе показываетъ, что относительная скорость обоихъ ударяющихся тѣлъ всегда мѣняетъ знакъ при ударѣ и въ случаѣ не полной упругости становится меньше, нежели до удара.

Если $v = 0$, и если масса m незначительна относительно M, то изъ уравненій 3) получимъ V_1 почти $= V$

и $$v_1 = V(1+\varepsilon).$$

Въ случаѣ абсолютной упругости

$$v_1 = 2V$$

т. е., когда масса ударяющаго тѣла весьма велика относительно массы тѣла претерпѣвающаго ударъ, то это послѣднее пріобрѣтаетъ скорость вдвое больше той, какую имѣло ударяющее тѣло.

Предположимъ еще, что скорость V бо́льшаго тѣла равна нулю; и пусть, какъ прежде, масса его M весьма велика относительно массы m. Въ такомъ случаѣ его можно разсматривать, какъ неподвижное препятствіе. Скорость V_1 будетъ нуль и скорость v_1 ударяющагося тѣла будетъ

$$v_1 = -\varepsilon v,$$

т. е., скорость всегда измѣняетъ знакъ при ударѣ и вообще становится меньше въ абсолютной величинѣ.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что ударившееся тѣло отражается отъ неподвижнаго препятствія по направленію, которое противоположно тому, по которому оно двигалось до удара.

Когда оба тѣла совершенно упруги, то

$$v_1 = -v$$

т. е., ударяющееся упругое тѣло отражается съ такою же скоростію, какую оно имѣло до удара.

Нетрудно вывести, что потеря живой силы въ этомъ случаѣ будетъ

$$\delta = \tfrac{1}{2}\frac{Mm(V-v)}{M+m}(1-\varepsilon^2).$$

Когда $\varepsilon=1$, то $\delta=0$, т. е., при ударѣ абсолютно упругихъ тѣлъ не происходитъ потери живыхъ силъ.

Обратимся теперь къ теоріи сопротивленія упругихъ жидкостей, предложенной Ньютономъ. Ньютонъ различаетъ здѣсь тѣже случаи, какіе мы разсматривали въ теоріи удара тѣлъ, т. е., частицы упругой среды сами могутъ быть абсолютно упруги (vi reflexionis quam maxima resiliant), или совершенно лишены упругости (vi omni reflexionis destituta), или же могутъ обладать неполною упругостію (vi reflexionis neque maxima, neque nulla sed mediocri aliqua resiliant). Величина сопротивленія получается, какъ увидимъ, различная для каждаго случая. Опредѣлимъ ее тѣмъ способомъ, какой употребленъ самимъ Ньютономъ въ Propositio XXXV, Problema VII.

Вообразимъ круговой цилиндръ, движущійся въ спокойной жидкости по направленію оси равномѣрно съ нѣкоторою скоростію. Въ теченіи какого нибудь промежутка времени цилиндръ приведетъ въ движеніе всю ту массу жидкости, какая заключается въ объемѣ, пройденномъ переднимъ основаніемъ цилиндра. Этотъ объемъ, очевидно, выражается произведеніемъ площади основанія на длину пройденнаго пути. Значитъ, цилиндръ, пройдя путь, равный длинѣ своей оси, сообщитъ движеніе такому количеству жидкости, котораго объемъ равенъ объему самого цилиндра. Предположимъ, что частицы жидкости абсолютно упруги. По закону удара упругихъ тѣлъ, движущійся цилиндръ сообщитъ каждой ударившейся частицѣ скорость вдвое больше той, какую самъ онъ имѣетъ. Количество движенія, сообщаемое жидкости цилиндромъ въ нѣкоторое время, выразится, какъ извѣстно, произведеніемъ массы жидкости, приведенной въ движеніе, на скорость, какая ей сообщена. Обозначимъ v постоянную скорость цилиндра, S площадь его основанія, l длину оси, ∂ плотность его и Δ_1 плотность жидкости. Количество движенія цилиндра равно $v\partial Sl$. Пройдя путь, равный половинѣ своей длины, цилиндръ приведетъ въ движеніе массу жидкости $=\frac{\Delta_1 Sl}{2}$ и сообщитъ ей скорость $=2v$, т. е., количество движенія, равное $v\Delta_1 Sl$. Отношеніе этого послѣдняго количества къ тому количеству движенія, какимъ обладаетъ цилиндръ, есть $\frac{\Delta_1}{\partial}$. Такимъ образомъ получается законъ сопротивленія въ томъ видѣ, какъ его выразилъ Ньютонъ, а именно: цилиндръ, проходя равномѣрно путь, равный половинѣ длины своей оси, сообщитъ частицамъ жидкости такое количество движенія, которое къ полному количеству движенія самого цилиндра относится, какъ плотность среды къ плотности цилиндра.

Объемъ, а слѣдовательно, и масса шара (при той же плотности) равняется $\frac{2}{3}$ объема и массы описаннаго цилиндра. Пользуясь прежними обозначеніями и полагая, что l есть діаметръ шара, мы получимъ для его массы выраженіе $\frac{2}{3}\partial Sl$. Количество движенія его есть $\frac{2}{3}\partial Slv$. Отсюда непосредственно видно, что сопротивленіе шара, какъ мы раньше сказали, вдвое меньше, нежели сопротивленіе цилиндра того же діаметра, т. е., шаръ, пройдя путь, равный своему діаметру, сообщитъ жидкости такое же количество движенія, какое цилиндръ сообщитъ ей, пройдя половину діаметра. Оно выразится произведеніемъ $v\Delta_1 Sl$.

Отношеніе этого количества къ количеству движенія шара можетъ быть написано

$$\frac{v.\Delta_1 Sl}{v\ \partial S\ \frac{2}{3}l} = \frac{\Delta_1}{\frac{2}{3}\partial},$$

т. е. шаръ, пройдя равномѣрнымъ движеніемъ путь, равный $\frac{2}{3}$ своего діаметра, сообщитъ частицамъ жидкости такое количество движенія, которое къ полному количеству движенія самого шара относится, какъ плотность среды къ плотности шара. Отсюда непосредственно вытекаетъ законъ сопротивленія въ той формѣ, какую даетъ ему Ньютонъ: *Шаръ, равномѣрно движущійся въ упругой жидкости, претерпѣваетъ сопротивленіе, которое такъ относится къ силѣ, способной произвести движеніе шара на протяженіи $\frac{2}{3}$ его діаметра, какъ плотность среды къ плотности шара* (Cas. 1).

Когда частицы жидкости совершенно лишены упругости, то движущійся цилиндръ сообщитъ имъ при ударѣ скорость, равную своей скорости. Количество движенія, полученное жидкостью въ то время, какъ цилиндръ или шаръ опишутъ путь равный своему діаметру, будетъ равно $v\Delta_1 Sl$ для цилиндра и $\frac{v\Delta_1 Sl}{2}$ для шара. Это значитъ, что цилиндръ, какъ и шаръ, испытаютъ въ этомъ случаѣ сопротивленіе вдвое меньшее, нежели въ случаѣ упругихъ частицъ (Cas. 2).

Если частицы не обладаютъ абсолютною упругостью, но и не совершенно лишены ея, то сопротивленіе будетъ представлять величину, среднюю между двумя вышеприведенными (Cas. 3).

Чтобы получить зависимость сопротивленія отъ скорости, опредѣлимъ количество движенія, сообщаемое жидкости цилиндромъ въ единицу времени. Такъ какъ при равномѣрномъ движеніи пространство, проходимое тѣломъ въ единицу времени, есть v, то масса вытѣсненной жидкости будетъ $v\Delta_1 S$, а количество движенія, потерянное цилиндромъ (предполагая частицы совершенно неупругими) $= S\Delta_1 v^2$. Отсюда видно, что сопротивленіе, испытываемое цилиндромъ, пропорціонально площади основанія цилиндра, плотности жидкости и квадрату скорости.

Такъ какъ $S=\pi r^2$, то сопротивленіе,—будемъ обозначать его R,—выразится:

$$R = \pi r^2 \Delta_1 v^2,$$

т. е., сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, квадрату радіуса (или діаметра) и первой степени плотности среды (Corol. 5).

Для шара законъ сопротивленія выразится такимъ же образомъ,

только коэффиціентъ пропорціональности надо уменьшить вдвое, т. е.,

$$R = \frac{\pi r^2}{2} \Delta_1 v^2.$$

Такъ опредѣляетъ Ньютонъ сопротивленіе, испытываемое движущимися тѣлами въ жидкостяхъ упругихъ. Болѣе подробное развитіе его теоріи, извѣстной подъ именемъ *обыкновенной теоріи* или теоріи *удара*, приведено во 2-мъ приложеніи. Теперь же перейдемъ къ разсмотрѣнію сопротивленія въ жидкостяхъ сплошныхъ (in mediis continuis).

B) Сопротивленіе въ сплошныхъ жидкостяхъ.

Сопротивленіе сплошной жидкой средины движенію въ ней твердаго тѣла Ньютонъ опредѣляетъ, какъ мы уже сказали выше, на основаніи истеченія жидкостей (Prop. XXXVI).

Вообразимъ (черт. 136) круговой цилиндрическій сосудъ ACDB, наполненный водою. AB его верхнее основаніе; CD горизонтальное дно, EF круговое отверстіе въ срединѣ дна, G центръ отверстія; GH вертикальная ось цилиндра. Черезъ отверстіе EF вытекаетъ вода. Очевидно, что скорость ея въ отверстіи EF такъ относится къ той скорости, съ какою понижается уровень AB, какъ площадь круга AB къ площади круга EF, потому что количества воды, проходящей въ данное время черезъ площадь того и другаго круга, должны быть равны. Что же касается до абсолютной величины скорости истеченія, то она, по теоремѣ Торичелли, равна той скорости, какую вода пріобрѣла бы, свободно падая съ высоты, равной высотѣ жидкости въ сосудѣ. Чтобы поддержать уровень жидкости на одной и той же высотѣ и сдѣлать, такимъ образомъ, истеченіе равномѣрнымъ, Ньютонъ вообразилъ другой цилиндръ APQB изо льда, имѣющій тоже основаніе и неопредѣленную высоту. Этотъ цилиндръ равномѣрно опускается, и тѣ части его, которыя достигли поверхности AB, превращаются въ жидкость, вливаются въ сосудъ и изъ него вытекаютъ черезъ отверстіе EF. Скорость опусканія ледянаго цилиндра равна той скорости, съ какою понижается слой воды AB вслѣдствіе истеченія жидкости. Можно себѣ представить, что скорость эта происходитъ вслѣдствіе свободнаго паденія частицъ льда съ нѣкоторой высоты IH, которую можно опредѣлить на основаніи вышеприведенной теоремы Торичелли. Въ самомъ дѣлѣ, согласно этой теоремѣ, IG такъ относится къ IH, какъ квадратъ скорости истеченія черезъ отверстіе EF къ квадрату скорости пониженія воды AB, или

$$\sqrt{IG} : \sqrt{IH} = \frac{\text{Скорость уровня AB}}{\text{Скорость въ отв. EF}} = \frac{\text{Площ. EF}}{\text{Площ. AB}}.$$

Вслѣдствіе этого вытеканіе будетъ происходить равномѣрно, и вода, выливаясь изъ отверстія EF, будетъ имѣть такую скорость, какую она пріобрѣла бы, свободно падая съ высоты IG. Надо замѣтить, что здѣсь принимаются во вниманіе только вертикальныя движенія водяныхъ частицъ. Что же касается горизонтальныхъ движеній, то они, по мнѣнію Ньютона, способствуютъ только сближенію частицъ жидкости другъ съ

другомъ, вслѣдствіе чего эти частицы образуютъ одинъ опускающійся жидкій столбъ или катарактъ ABNFEM.

Вообразимъ теперь, что вся масса воды въ сосудѣ, за исключеніемъ катаракта, превратилась въ ледъ. Движеніе будетъ происходить какъ бы въ ледяной воронкѣ. Допустимъ, что не происходитъ при этомъ тренія и вообще какого бы то ни было сопротивленія движенію со стороны стѣнокъ воронки. Въ этомъ случаѣ, по мнѣнію Ньютона, столбъ ABNEFM, въ силу своей тяжести, производитъ истеченіе жидкости, дно же сосуда испытываетъ давленіе только отъ ледянаго столба. Если бы ледъ въ сосудѣ растаялъ, то скорость истеченія не измѣнилась бы, отверстіе же въ этомъ случаѣ должно быть больше, потому что не всѣ частицы проходятъ черезъ него по вертикальному направленію; нѣкоторыя изъ нихъ, приходя съ боковъ сосуда, имѣютъ косвенное направленіе. Оттого струя нѣсколько ниже отверстія, на разстояніи приблизительно равномъ половинѣ діаметра отверстія, становится тоньше. По измѣренію самого Ньютона, діаметръ ея такъ относится съ діаметру отверстія EF, какъ 21 къ 25; и, значитъ, скорость истеченія какъ 25^2 къ 21^2, т. е., приблизительно какъ 17 къ 12 или какъ $\sqrt{2}$ къ 1. Изъ опытовъ же извѣстно, что количество воды, выливающейся въ данное время черезъ круговое отверстіе въ днѣ сосуда, отвѣчаетъ не величинѣ дѣйствительнаго отверстія, а величинѣ отверстія, котораго діаметръ въ $\frac{21}{25}$ разъ меньше дѣйствительнаго. Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи Ньютонъ и разсматриваетъ вездѣ именно это уменьшенное отверстіе и принимаетъ, что истеченіе происходитъ въ дѣйствительности такъ, какъ будто бы вся масса воды, окружающая катарактъ, находилась въ твердомъ состояніи, т. е. какъ будто бы вода двигалась въ ледяной воронкѣ, допуская при этомъ, что и распредѣленіе давленія одно и тоже какъ въ дѣйствительномъ, такъ и въ воображаемомъ случаѣ, т. е. масса воды, образующая катарактъ, своею тяжестію производитъ истеченіе, между тѣмъ какъ масса воды или льда, находящаяся кругомъ катаракта, производитъ давленіе на дно сосуда. Скорость истеченія не зависитъ отъ формы нижняго отверстія, лишь бы только высота воды оставалась одна и таже. (Cas. 5).

Что же касается силы, производящей истеченіе, то она измѣряется вѣсомъ цилиндрическаго столба жидкости, котораго основаніе есть EF, а высота 2 GI или 2 CK. Дѣйствительно, въ теченіи того времени, когда количество вытекшей жидкости будетъ равно вѣсу этого столба, жидкость, падая съ высоты IG, подъ вліяніемъ своего вѣса, пріобрѣла бы ту скорость истеченія, которую имѣетъ въ дѣйствительности.

Предположимъ теперь (листъ 11-й, черт. 137-й), что въ средину отверстія EF введенъ небольшой кружокъ PQ, параллельный горизонту съ центромъ въ G. Вода будетъ вытекать черезъ кольцеобразное отверстіе EPQF. При этомъ надъ кружкомъ PQ образуется нѣкоторый столбъ жидкости PHQ, непринимающій участіе въ истеченіи, но своею тяжестію производящій давленіе на кружокъ. Катарактъ будетъ въ этомъ случаѣ имѣть кольцеобразную форму AHPEBHQF. Предполагая, какъ прежде, что вода кругомъ катаракта и надъ кружкомъ PQ превратилась въ ледъ, Ньютонъ доказываетъ:

1) что вѣсъ, поддерживаемый кружкомъ PQ, *больше*, нежели вѣсъ третьей части водянаго цилиндра [1]), котораго основаніе есть этотъ кружокъ, а высота=высотѣ воды въ сосудѣ. (Corol. 7).

2) что этотъ вѣсъ *меньше* $\frac{2}{3}$ упомянутаго столба [2]) (Corol. 8). И наконецъ высказываетъ слѣдующее положеніе, какъ увидимъ, весьма важное въ развиваемой имъ теоріи сопротивленія:

3) вѣсъ, поддерживаемый кружкомъ, относится (какъ я думаю, quantum sentio) къ вѣсу водянаго цилиндра съ основаніемъ равнымъ площади кружка и высотою $= \frac{1}{2}$ GH, какъ EF^2 относится къ $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, т. е., какъ площадь отверстія EF къ разности между этою площадью и половиною площади кружка PQ. (Corol. 10).

Это предложеніе Ньютонъ далъ безъ доказательства [3]). А между тѣмъ оно служитъ исходнымъ пунктомъ при опредѣленіи абсолютной величины сопротивленія въ разсматриваемой теоріи.

Допустивъ, затѣмъ (въ леммѣ IV), что сопротивленіе, испытываемое цилиндромъ, равно сопротивленію только передняго его основанія, Ньютонъ слѣдующимъ образомъ (въ Proposition XXXVII, Theorema XXIX) выводитъ законъ этого сопротивленія.

Вообразимъ опять, черт. 138, цилиндрическій сосудъ ABCD, наполненный водою, и пусть дно его касается поверхности спокойной воды. Вода изливается изъ сосуда посредствомъ вертикальнаго канала EFTS, прикрѣпленнаго къ дну сосуда. Предположимъ, какъ прежде, что истеченіе сдѣлано равномѣрнымъ при помощи прибавочнаго ледянаго цилиндра. Если KA такъ относится къ CK, какъ квадратъ разности площадей канала EF и круга PQ къ квадрату площади круга AB, то ясно, что скорость воды въ отверстіи EF будетъ такова, какую вода пріобрѣла бы, свободно падая съ высоты KC или IG. Скорость воды будетъ одна и таже на всемъ протяженіи канала EFTS.

На основаніи приведеннаго нами выше положенія, вѣсъ, поддерживаемый кружкомъ PQ, въ какомъ бы мѣстѣ канала ни находился кружокъ, такъ относится къ вѣсу цилиндра съ основаніемъ PQ и высотой $\frac{1}{2}$ GH, какъ площадь EF къ разности этой площади и половины площади кружка PQ, т. е. какъ $\overline{EF}^2$ къ $\overline{EF}^2 - \frac{1}{2} PQ^2$. Когда ширина сосуда AB будетъ безконечно велика, то линія IH будетъ безконечно мала, и HG= IG. Тогда въ предъидущемъ отношеніи вмѣсто $\frac{1}{2}$ GH можно взять $\frac{1}{2}$ IG.

Закроемъ теперь и верхнее, и нижнее отверстія канала EFTS и будемъ поднимать кружокъ PQ. Жидкость, вытѣсняемая кружкомъ изъ верхнихъ частей канала, будетъ переливаться въ нижнія части черезъ кольцеобразное отверстіе между кружкомъ и стѣнками канала. Пусть v будетъ скорость поднятія кружка, w скорость опускающейся жидкости.

---

[1]) Потому что поверхность столба жидкости, покоющаяся подъ кружкомъ должна быть выпуклою, а потому ея объемъ болѣе чѣмъ объемъ соотвѣтственнаго конуса.

[2]) Потому что параболоидъ, опирающійся на кружокъ, и имѣющій вершину при поверхности жидкости, представляетъ такой объемъ, а покоющаяся жидкость представляется Ньютону долженствующею имѣть болѣе острую, коническую форму около своей вершины.

[3]) Quantum sentio — пишетъ Ньютонъ.

Объемъ жидкости, вытѣсняемой кружкомъ въ единицу времени, будетъ $\frac{v\pi PQ^2}{4}$ (гдѣ PQ есть діаметръ кружка). Съ другой стороны этотъ же объемъ можетъ быть выраженъ произведеніемъ $\frac{w\pi(EF^2-PQ^2)}{4}$.

Отсюда

$$\frac{v}{w}=\frac{EF^2-PQ^2}{PQ^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

т. е., скорость поднятія кружка такъ относится къ скорости опускающейся воды, какъ площадь кольцеобразнаго отверстія къ площади круга PQ; а скорость v кружка къ суммѣ этихъ скоростей, $v+w$, т. е. къ относительной скорости нисходящей воды, какъ площадь того же кольцеобразнаго отверстія къ площади отверстія EF, т. е., какъ $\overline{EF}^2-PQ^2$ къ $\overline{EF}^2$.

Пусть эта относительная скорость будетъ равна той скорости, съ какою вода выходила черезъ отверстіе EF, когда каналъ былъ открытъ, т. е., какую она пріобрѣла бы, свободно падая съ высоты IG (предполагая, что размѣры AB сосуда безконечно велики). Иначе говоря,—пусть скорость движенія кружка v такъ относится къ той скорости, какую вода пріобрѣтаетъ, свободно падая съ высоты IG, какъ $\overline{EF}^2-\overline{PQ}^2 : \overline{EF}^2$. Тогда сила напора воды на движущійся кружокъ, т. е., сопротивленіе, испытываемое имъ, такъ будетъ относиться къ вѣсу цилиндра воды, котораго основаніе есть этотъ кружокъ, а высота$=\frac{1}{2}$ IG, какъ $\overline{EF}^2$ относится къ $\overline{EF}^2-\frac{1}{2}PQ^2$.

Если ширина канала EFTS безконечно велика, то оба предъидущія отношенія $\left(\frac{EF^2}{\overline{EF}^2-\frac{1}{2}PQ^2} \text{ и } \frac{\overline{EF}^2-PQ^2}{\overline{EF}^2}\right)$ будутъ равны единицѣ, т. е., скорость кружка будетъ такова, какую вода пріобрѣтаетъ, свободно падая съ высоты IG; сопротивленіе же, испытываемое имъ, равно вѣсу цилиндра, котораго основаніе есть этотъ кружокъ, а высота $=\frac{1}{2}$IG. Такимъ образомъ получается слѣдующій законъ: сопротивленіе, испытываемое круговою площадкой, движущейся перпендикулярно своей плоскости въ спокойной неограниченной жидкости, съ нѣкоторою скоростію v,—измѣряется вѣсомъ столба жидкости, котораго основаніе есть этотъ кружокъ, а высота равна половинѣ той высоты, съ какой должно упасть тѣло въ силу тяжести, чтобы пріобрѣсти скорость кружка v.

Опредѣлимъ зависимость между сопротивленіемъ и скоростію кружка. Пусть v эта скорость; w скорость, отвѣчающая высотѣ IG. Раньше мы имѣли

$$\frac{v}{w}=\frac{\overline{EF}^2-\overline{PQ}^2}{EF^2}$$

Но $w^2=2g.$ IG, гдѣ g есть напряженіе силы тяжести.

На основаніи этого

$$v^2=2g.\ \text{IG}.\frac{\overline{EF}^2-\overline{PQ}^2}{\overline{EF}^2}=2g.h_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ h_1 есть высота, соотвѣтствующая скорости v.

Обозначимъ R величину сопротивленія. На основаніи предъидущаго имѣемъ

$$\frac{R}{\frac{1}{2}S.\Delta.IG} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{EF}^2 - \frac{1}{2}\overline{PQ}^2},$$

гдѣ Δ есть плотность, т. е., вѣсъ единицы объема жидкости, S площадь кружка PQ.
Отсюда

$$R = \tfrac{1}{2}S.\Delta.IG.\ \frac{\overline{EF}^2}{\overline{EF}^2 - \frac{1}{2}\overline{PQ}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Опредѣляя IG изъ уравненія (2) и вставляя въ выраженіе для R, получимъ

$$R = \tfrac{1}{2}.S.\Delta.h_1\ \frac{\overline{EF}^2}{\overline{EF}^2 - \frac{1}{2}\overline{PQ}^2} \cdot \frac{\overline{EF}^4}{(\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Или, такъ какъ $h_1 = \frac{v^2}{2g^2}$

$$R = \frac{1}{4g}\ S.V.^2\Delta.\ \frac{\overline{EF}^2}{\overline{EF}^2 - \frac{1}{2}\overline{PQ}^2} \cdot \frac{\overline{EF}^4}{(\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Обозначимъ r радіусъ канала, т. е., $r = \frac{1}{2}$ EF, $r_1 = \frac{1}{2}$ PQ есть радіусъ движущагося круга. Выраженіе для R приведется тогда къ слѣдующему виду:

$$R = \frac{1}{4g}\ \frac{V\pi r^2, v^2}{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\Delta\pi v^2}{4g}\ \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)^2}$$

Если r безконечно великъ относительно r_1, то, пренебрегая отношеніемъ $\frac{r_1}{r}$, получимъ

$$R = \frac{\Delta.\pi r_1^2 v^2}{4g}.$$

На основаніи всего вышеизложеннаго надо заключить, что цилиндръ и шаръ съ равными діаметрами, двигаясь въ цилиндрическомъ каналѣ такимъ образомъ, что оси ихъ совпадали бы съ осью канала,—будутъ испытывать равныя сопротивленія движенію. Въ самомъ дѣлѣ, пространство между стѣнками канала и движущимся тѣломъ будетъ одно и тоже въ обоихъ случаяхъ, а потому и количество и скорость протекающей воды будутъ одни и тѣже (Lemma V et VI). Это справедливо и въ предѣльномъ случаѣ, когда размѣры канала будутъ безконечно велики, т. е., для случая движенія тѣлъ въ неограниченной жидкости. Слѣдовательно, сопротивленіе, испытываемое шаромъ при движеніи въ сплошной жидкости, равно сопротивленію описаннаго цилиндра, или круговой площади, равной большему кругу шара. И вообще согласно развиваемой Ньютономъ теоріи, сопротивленіе въ сплошныхъ жидкостяхъ не зависитъ отъ формы движущихся тѣлъ, а только отъ наибольшаго сѣченія

ихъ перпендикулярнаго къ направленію движенія. Оно, вообще, меньше нежели въ жидкостяхъ упругихъ. Такъ для шара оно вдвое меньше, для цилиндра—въ четыре раза. Для наглядности представимъ все это въ формѣ таблицы.

Величину сопротивленія мы будемъ выражать вѣсомъ столба жидкости, котораго основаніе S есть основаніе цилиндра или площадь большаго круга для шара, а высота представляетъ нѣкоторое кратное или дробь отъ той высоты H, съ какой должно упасть тѣло, чтобы пріобрѣсти скорость движущагося тѣла. Общая формула есть слѣдующая:

$$R = K_1 \Delta S H$$

		Сопротивленіе для цилиндра.	Для шара.
A. Жидкость упругая.	a) Частицы упругія	$\Delta S.4H$	$\Delta S.2H$
	b) Частицы неупругія	$\Delta S.2H$	$\Delta S.H$
B. Жидкость неупругая.	—	$\Delta S.\frac{H}{2}$	$\Delta S.\frac{H}{2}$

Опредѣлимъ еще абсолютную величину сопротивленія для различныхъ случаевъ, разсматриваемыхъ въ теоріи Ньютона. Для этого воспользуемся формулою

$$R = K\Delta SV^2.$$

Пусть V=1 метру.
S=1 квадратному метру.
Δ выражаетъ число килограммовъ жидкости въ 1 кубич. метрѣ.
Для воздуха Δ=1,2, для воды Δ=1000.

Коефиціентъ K имѣетъ различное значеніе, какъ это видно будетъ изъ таблицы. Очевидно также, что $K = \frac{K_1}{2g}$. Напряженіе тяжести g принимаемъ=9,82.

	Цилиндръ.		Шаръ.	
A. Жидкость упругая.				
a. частицы упруги.	$K = \frac{2}{g}$		$K = \frac{1}{g}$	
	Δ=1	Δ=1,2 (возд.)	Δ=1	Δ=1,2 (возд.)
	R=0,204	R_1=0,2428	R=0,102	R_1=0,1214
b. частицы неупруги.	$K = \frac{1}{g}$		$K = \frac{1}{2g}$	
	R=0,102	R_1=0,1214	R=0,051	R_1=0,0607
B. Жидкость неупругая.	$K = \frac{1}{4g}$		$K = \frac{1}{4g}$	
	Δ=1	Δ=1000 (вода)	Δ=1	Δ=1000
	R=0,0255	R_1=25,5	R=0,0255	R_1=25,5.

Величина R_1 выражаетъ число килограммовъ давленія на квадратный метръ поверхности при скорости=1 метру въ секунду.

Сравнивая, при помощи этихъ таблицъ, сопротивленія въ жидкостяхъ упругихъ съ сопротивленіемъ въ сплошныхъ неупругихъ жидкостяхъ, мы видимъ, что, по теоріи Ньютона, отношеніе между тѣмъ и другимъ

должно быть, при прочихъ равныхъ условіяхъ, равно или учетверенному (если частицы жидкости абсолютно упруги), или удвоенному (въ случаѣ совершенно неупругихъ частицъ) отношенію между плотностями этихъ жидкостей. Опытъ не подтверждаетъ ни того, ни другаго заключенія. Собственные опыты Ньютона надъ паденіемъ шарообразныхъ тѣлъ въ воздухѣ и водѣ показали, что отношеніе между сопротивленіями въ той и другой срединѣ равно (приблизительно) отношенію между ихъ плотностями; и притомъ, абсолютная величина сопротивленія (по крайней мѣрѣ для шара) отвѣчаетъ случаю неупругой жидкости.

Въ самомъ дѣлѣ (см. гл. 2), на основаніи опытовъ Ньютона паденіе шаровъ въ водѣ и воздухѣ даетъ почти одну и туже среднюю величину сопротивленія, разсчитанную для плотности $\Delta = 1$ и на одинъ квадратный метръ поверхности, а именно близкую 220,028.

Поэтому, законъ сопротивленія, общій для жидкостей упругихъ и сплошныхъ, можетъ быть выраженъ слѣдующимъ образомъ:

Сопротивленіе (для шара) измѣряется вѣсомъ столба жидкости съ основаніемъ, равнымъ площади большаго круга, и высотою, равною половинѣ той высоты, съ которой должно упасть тѣло вслѣдствіе тяжести, чтобы пріобрѣсти скорость движущагося тѣла.

Сравнивая между собою обѣ разсмотрѣнныя теоріи Ньютона, мы видимъ, что первая изъ нихъ—для жидкостей упругихъ—даетъ величину сопротивленія слишкомъ большую, съ опытомъ несогласную, вторая — для жидкостей сплошныхъ—даетъ въ случаѣ движенія шара величину, довольно близкую къ дѣйствительно наблюдаемой, но она относитъ сопротивленіе только къ наибольшему поперечному сѣченію движущихся тѣлъ, независимо отъ формы передней и задней поверхности ихъ, что также противорѣчитъ опыту.

Нужно замѣтить, что самъ Ньютонъ не считаетъ данный имъ законъ сопротивленія за абсолютно точный. Такъ въ концѣ третьей главы 7-й книги (Propos. XIV. Scholium) онъ говоритъ: «сопротивленіе, испытываемое сферическими тѣлами въ жидкостяхъ, зависитъ частію отъ вязкости (tenacitate), частію отъ тренія, частію отъ плотности среды. Сопротивленіе, зависящее отъ плотности, пропорціонально квадрату скорости; сопротивленіе, зависящее отъ вязкости, равномѣрно или пропорціонально моменту времени (est uniformis, sive ut momentum temporis [1])». Кромѣ того, собственные опыты Ньютона показали, что законъ пропорціональности квадратамъ скоростей справедливъ не для всякой скорости. Такъ, разбирая опыты надъ паденіемъ тѣлъ въ водѣ, Ньютонъ замѣчаетъ, что при малой скорости времена паденій хорошо согласуются съ теоріей; при быстромъ же паденіи сопротивленіе оказывается больше, нежели то слѣдуетъ по теоріи. По мнѣнію Ньютона, это зависитъ во-первыхъ оттого, что шары нѣсколько вращаются при паденіи, во-вторыхъ оттого, что чѣмъ больше скорость паденія, тѣмъ меньшее давленіе испытываютъ они въ задней своей части. «И если скорость непрерывно (perpetuo) уве-

[1]) Momentum genitae Ньютонъ называетъ безконечно малое приращеніе (incrementa vel decrementa momentanea) функціи. Моментъ времени — тоже, что дифференціалъ времени. (Lib. II. Sect. 2. Lemma II).

ціенты K и K_1, и обозначая, какъ прежде, R величину сопротивленія, представимъ его въ такомъ видѣ:

(3) . . . . . $R = K\Delta Sv^2 = K_1\Delta SH,$

гдѣ Δ, есть вѣсъ единицы объема жидкости. Между коеффиціентами K и K_1 существуетъ отношеніе: $K_1 = K.2g$.

Разберемъ теперь тотъ случай, когда передняя поверхность тѣла не перпендикулярна къ направленію движенія, а наклонена къ нему подъ нѣкоторымъ угломъ α. Пусть фигура ABBE (черт. 140), представляетъ тѣло, движущееся въ направленіи указанномъ стрѣлкою. Пройдя разстояніе BE = dx, тѣло перемѣститъ всѣ частицы, содержащіяся въ пространствѣ BEEB. Пусть S есть величина передней поверхности тѣла. Количество перемѣщенныхъ частицъ будетъ $S.Sin\alpha.dx$. Масса ихъ $S\Delta_1 Sin\alpha dx$. Кромѣ того, вслѣдствіе непрямаго направленія удара, дѣйствіе будетъ производить только составляющая скорости, перпендикулярная къ поверхности. Вслѣдствіе этого сопротивленіе R выразится

(4) . . . . . $R = K\Delta Sv^2 Sin^2\alpha$

Сопротивленіе это направлено перпендикулярно къ передней поверхности тѣла; оно не совпадаетъ съ направленіемъ движенія, а оттого производитъ не только уменьшеніе въ скорости тѣла, но стремится измѣнить также и направленіе движенія. Измѣненіе скорости производитъ составляющая

(5) . . . . . $R\sin\alpha = K\Delta Sv^2 \sin^3\alpha$

Измѣненіе въ направленіи происходитъ подъ вліяніемъ силы

(6) . . . . . $R\cos\alpha = K\Delta Sv^2 \sin^2\cos\alpha.$

Пользуясь этими формулами, можно опредѣлить сопротивленіе для тѣлъ какой угодно формы, разсматривая ихъ поверхность, какъ рядъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ площадокъ, различнымъ образомъ наклоненныхъ къ направленію движенія. Мы разсмотримъ только тѣла вращенія, движущіяся по направленію оси. Тѣла этого рода не испытываютъ измѣненія въ направленіи движенія, такъ какъ дѣйствіе составляющей перпендикулярной къ направленію движенія сводится къ нулю, вслѣдствіе симметричности поверхности относительно оси.

Пусть ADB (черт. 141) будетъ кривая линія, отъ обращенія которой около оси AB происходитъ разсматриваемая поверхность вращенія. Дѣйствіе частицъ жидкости испытываетъ только передняя часть поверхности, происшедшая отъ обращенія линіи AMD, гдѣ D есть такая точка, въ которой кривая начинаетъ приближаться къ оси AB.

Примемъ точку A за начало координатъ, и пусть линія AB будетъ осью абсцисъ; Ay ось ординатъ. Пусть Ap=x, PM=y, Pp=dx, mn=dy, $Mm = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Безконечно малая дуга ds, обращаясь около оси AB, образуетъ зону, которой поверхность=$2\pi yds$. Всѣ части этой зоны образуютъ съ направленіемъ движенія одинъ и тотъ же уголъ, котораго синусъ есть $\frac{dy}{ds}$. При этихъ обозначеніяхъ сопротивленіе, которое испытываетъ разсматриваемая зона въ направленіи движенія, будетъ

$$= K\Delta v^2 2\pi y.ds.\frac{dy^3}{ds^3} = 2\pi K\Delta v^2 y\frac{dy^3}{ds^2}$$

Интегралъ этого выраженія

$$2\pi K\Delta v^2\int\frac{ydy^3}{ds^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

взятый на всемъ протяженіи кривой отъ точки A до той точки D, гдѣ кривая начинаетъ приближаться къ оси, выразитъ сопротивленіе, испытываемое тѣломъ.

Приложимъ эти выводы къ шару, котораго радіусъ DC=a. Въ этомъ случаѣ $ds^2 = \frac{a^2dy^2}{a^2-y^2}$

Полное сопротивленіе выразится

$$2\pi K\Delta v^2\int_0^a\frac{y(a^2-y^2).dy}{a^2} = \tfrac{1}{2}\pi K\Delta a^2 v^2.$$

Но πa^2 есть площадь большаго круга. Обозначимъ ее M. Сопротивленіе шара будетъ

$$\tfrac{1}{2}K\Delta Mv^2.$$

Сопротивленіе цилиндра того же радіуса было, какъ мы видѣли, равно $K\Delta Mv^2$, откуда ясно, что сопротивленіе шара составляетъ половину сопротивленія цилиндра, какъ это и доказалъ, хотя инымъ способомъ, Ньютонъ.

Приложимъ еще наши формулы къ конусу (черт. 142), движущемуся по направленію оси въ сторону своей вершины. Уголъ растворенія конуса BAC пусть будетъ 2β. Радіусъ основанія BD=r; AP=x, MP=y, AM=s.

$$y = s\sin\beta;\ dy = ds.\sin\beta$$

$$ds^2 = \frac{dy^2}{\sin^2\beta}$$

$$\int\frac{y\,dy^3}{ds^2} = \int y\,dy.\sin^2\beta.$$

Предѣлы интегрированія y=0, y=r.

$$\sin^2\beta\int_0^r ydy = \frac{r^2}{2}\sin^2\beta.$$

Слѣдоват., сопротивленіе для конуса выразится слѣдующимъ образомъ:

$$R = 2\pi K\Delta v^2.\frac{r^2}{2}\sin^2\beta = K\pi r^2.\sin^2\beta.\Delta v^2.$$

Разсмотримъ еще поверхность, образуемую вращеніемъ дуги круга ABD (черт. 143) около ея хорды AD.

Пусть $2\beta_0$ будетъ уголъ при центрѣ, отвѣчающій дугѣ ABD. Радіусъ круга=r; AP=x; MP=y; AM=s;

$$y = MP = mp = Cm - Cp.\ \text{Но}\ Cm = r.\cos MCm.$$

Обозначимъ β перемѣнный уголъ MCm. Тогда

$$Cm = r\cos\beta,\ Cp = r\cos\beta_0;$$
$$y = r(\cos\beta - \cos\beta_0),$$

$$dy = -\,r\sin\beta.d\beta,$$
$$ds = r d\beta.$$

$$\int \frac{y dy^3}{ds^2} = -\int r^2(\cos\beta - \cos\beta_0)\sin^3\beta.d\beta.$$

Предѣлы интегрированія $\beta = \beta_0$ и $\beta = 0$. Переставивъ предѣлы и измѣнивъ знакъ передъ интеграломъ, получимъ

$$\int \frac{y dy^3}{ds^2} = r^2 \int_0^{\beta_0} (\cos\beta - \cos\beta_0)\sin^3\beta.d\beta$$

$$= r^2 \left(\frac{\sin^4\beta_0}{4} + \sin^2\beta_0\cos^2\beta_0 + \frac{2}{3}\cos^4\beta_0 - \frac{2}{3}\cos\beta_0\right).$$

Слѣдовательно, сопротивленіе R выразится

8. . . $R = 2\pi K\Delta v^2 r^2 \left(\frac{\sin^4\beta_0}{4} + \sin^2\beta_0\cos^2\beta_0 + \frac{2}{3}\cos^4\beta_0 - \frac{2}{3}\cos\beta_0\right).$

При помощи уравненія (7) можно опредѣлить такую поверхность вращенія, которая при данной длинѣ и поперечномъ сѣченіи претерпѣвала бы наименьшее сопротивленіе при движеніи въ жидкости. Очевидно, что въ этомъ случаѣ интегралъ

$$\int_0^a \frac{y dy^3}{ds^2}$$

долженъ быть minimum. Для этого, по правиламъ варьяціоннаго исчисленія, варьяція отъ этого интеграла должна быть равна нулю. Для нашей цѣли достаточно замѣтить, что уравненіе производящей кривой, удовлетворяющей требуемому условію, получится, если исключить $p = \frac{dy}{dx}$ изъ двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$x = \frac{1}{2}\, a\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \lg p\right) + b$$

$$y = \frac{a(1+p^2)^2}{2p^3}$$

гдѣ a и b произвольныя постоянныя.

Ньютонъ первый далъ рѣшеніе этой задачи, не открывая, однако, способа, какимъ онъ пришелъ къ этому рѣшенію. Свойства производящей кривой онъ выражаетъ слѣдующимъ образомъ (черт. 144).

Въ точкѣ B, гдѣ кривая пересѣкаетъ ось, возставимъ перпендикуляръ BG; онъ будетъ касаться къ кривой въ точкѣ B. Возьмемъ произвольную точку N на кривой и опустимъ перпендикуляръ MN на ось вращенія. Возьмемъ также произвольную точку G на линіи BG, и проведемъ изъ этой точки прямую, параллельную касательной къ кривой въ точкѣ N. Она пересѣчетъ ось въ нѣкоторой точкѣ R. Тогда

$$MN : GR = \overline{GR}^2 : 4.BR.\ \overline{GB}^2.$$

Кривая, обладающая этими свойствами, образуетъ при вращеніи

около оси AB такую поверхность, которая при движеніи въ жидкости будетъ претерпѣвать наименьшее сопротивленіе сравнительно со всякою поверхностью вращенія той же длины и того же поперечнаго сѣченія. (Propos. XXXIV, Scholium).

Обратимся теперь къ изслѣдованію нѣкоторыхъ случаевъ движенія тѣлъ въ сопротивляющейся средѣ подъ вліяніемъ силы тяжести. Мы будемъ разсматривать только такія тѣла, которыхъ форма и плотность симметричны относительно оси, и самая ось параллельна направленію движенія. Для такихъ тѣлъ, какъ не трудно видѣть, дѣйствіе сопротивленія приводится къ одной силѣ, направленной по оси фигуры (Poisson. Traité de mécanique T. I, § 124). Плотность среды будемъ предполагать постоянною.

Пусть R, какъ прежде, выражаетъ величину сопротивленія, испытываемаго тѣломъ; m — масса тѣла. Сопротивленіе дѣйствуетъ какъ ускоряющая сила, направленная противоположно движенію. Обозначая f напряженіе этой силы, получимъ

$$f = \frac{R}{m}$$

Общее выраженіе для R, какъ мы видѣли, можетъ быть написано $R = KS\Delta v^2$. Или, $R = \lambda\Delta v^2$, полагая $KS = \lambda$, гдѣ λ есть коеффиціентъ, зависящій не отъ свойствъ жидкой среды, но только отъ формы и размѣровъ движущагося тѣла. Подставляя въ выраженіе для f, получимъ

$$f = \frac{\lambda\Delta v^2}{m}.$$

Количество f того же рода, какъ и напряженіе тяжести g, и между ними можно установить отношеніе слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что при нѣкоторой скорости a, f будетъ равно g_1, т. е.,

$$g_1 = \frac{\lambda\Delta a^2}{m}.$$

На основаніи этого,

$$\frac{f}{g_1} = \frac{v^2}{a^2}$$

или

$$f = \frac{g_1 v^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Сила f всегда направлена противоположно движенію и потому въ уравненіе движенія входитъ съ отрицательнымъ знакомъ. Но кромѣ дѣйствія, выражаемаго величиною f, сопротивляющаяся среда оказываетъ на движеніе тѣла еще иное вліяніе: она уменьшаетъ вѣсъ тѣла на величину, равную вѣсу вытѣсненной жидкости. Пусть P будетъ вѣсъ тѣла въ пустотѣ; δ плотность, т. е., вѣсъ единицы объема его. Вѣсъ его, P, въ жидкости будетъ $P(1 - \frac{\Delta}{\delta})$, т. е., уменьшится въ отношеніи $1 - \frac{\Delta}{\delta}$ къ 1, а потому и величина g, т. е., напряженіе тяжести при движеніи тѣла въ жидкости, уменьшится также въ отношеніи $(1 - \frac{\Delta}{\delta})$ къ 1.

Обозначимъ $g_1 = g\left(1 - \frac{\Delta}{\delta}\right)$. Эта исправленная величина g войдетъ въ выраженіе для f и повліяетъ понятнымъ образомъ на величину постоянной скорости a, входящей въ это выраженіе.

На основаніи предъидущаго, уравненіе движенія тѣла въ сопротивляющейся средѣ напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dv}{dt} = g_1 - \frac{g_1 v^2}{a^2}$$

Отсюда

$$g_1 dt = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$$

Интегрируя и полагая, что при $t = 0$ было $v = 0$, получимъ

$$g_1 t = \frac{1}{2} \operatorname{alg} \frac{a + v}{a - v}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

гдѣ подъ знакомъ *lg* мы разумѣемъ Неперовъ логарифмъ даннаго числа, при основаніи, которое во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ обозначать e.

Переходя отъ логарифмовъ къ числамъ, получимъ

$$\frac{a - v}{a + v} = e^{-\frac{2g_1 t}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Отсюда легко опредѣлится скорость v:

$$v = \frac{a\left(e^{\frac{g_1 t}{a}} - e^{-\frac{g_1 t}{a}}\right)}{e^{\frac{g_1 t}{a}} + e^{-\frac{g_1 t}{a}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad A.$$

Чтобы опредѣлить величину пройденнаго пути въ зависимости отъ времени, умножаемъ это уравненіе на dt и замѣчая, что $v dt = dx$, гдѣ x есть пройденный путь, который мы считаемъ по вертикальному направленію внизъ отъ той точки, съ которой началось паденіе тѣла, получимъ

$$dx = \frac{a\left(e^{\frac{g_1 t}{a}} - e^{-\frac{g_1 t}{a}}\right)}{e^{\frac{g_1 t}{a}} + e^{-\frac{g_1 t}{a}}} dt.$$

Интегралъ этого выраженія есть

$$x = \frac{a^2}{g_1} \lg\left(e^{\frac{g_1 t}{a}} + e^{-\frac{g_1 t}{a}}\right) + \text{пост.}$$

Пусть при $t = 0$ было $x = 0$. Въ такомъ случаѣ постоянное опредѣлится изъ уравненія

$$0 = \frac{a^2}{g_1} \lg 2 + \text{пост.};$$

и искомая величина x будетъ

$$x = \frac{a^2}{g_1} \lg \frac{e^{\frac{g_1 t}{a}} + e^{-\frac{g_1 t}{a}}}{2} \quad \ldots\ldots \text{B.}$$

Или

$$2e^{\frac{g_1 x}{a^2}} = e^{\frac{g_1 t}{a}} + e^{-\frac{g_1 t}{a}}$$

Опредѣлимъ зависимость между x и v.

$$g_1 dt = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2},$$

Но $dt = \frac{dx}{v}$, поэтому

$$g_1 dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}.$$

Интегрируя и полагая, что при $x = 0$, v также $= 0$, получимъ

$$x = \frac{a^2}{2g} \lg \frac{a^2}{a^2 - v^2} \quad \ldots\ldots \text{C.}$$

Уравненія A, B и C представляютъ полное рѣшеніе вопроса о движеніи падающаго тѣла подъ вліяніемъ сопротивленія пропорціональнаго квадрату скорости.

Для опытныхъ изслѣдованій надъ сопротивленіемъ, весьма большое значеніе представляетъ уравненіе B, показывающее зависимость между пройденнымъ пространствомъ и временемъ паденія. Пространство въ каждомъ рядѣ опытовъ разъ навсегда измѣрено; времена паденій наблюдаются. Такъ поступалъ въ своихъ опытахъ Ньютонъ и другіе изслѣдователи. Укажемъ еще на одно весьма важное свойство изслѣдуемаго движенія. Скорость падающаго тѣла постепенно увеличивается, а съ возрастаніемъ скорости, увеличивая также и сопротивленіе. Между тѣмъ напряженіе тяжести сохраняетъ постоянную величину. Поэтому можно предвидѣть, что сопротивленіе должно наконецъ получить столь большую величину, при которой оно уравновѣситъ дѣйствіе тяжести. Начиная съ этого момента, тѣло при дальнѣйшемъ движеніи будетъ имѣть постоянную скорость. Это можно видѣть и изъ формулы A. Въ самомъ дѣлѣ, при очень большомъ t, величина

$$e^{-\frac{g_1 t}{a}}$$

будетъ весьма мала. Пренебрегая ею, получимъ

$$v = a \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Точно также изъ уравненія B находимъ

$$x = \frac{a^2}{g} \lg \frac{e^{\frac{g_1 t}{a}}}{2} = \frac{a^2}{g} \left(\lg e^{\frac{gt}{a}} - \lg 2 \right).$$

Такъ какъ $\lg 2 = 0{,}693147$, то

$$x = at - 0{,}693147 \cdot \frac{a^2}{g} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) выражаютъ свойство равномѣрнаго движенія.

Изъ предъидущаго ясно, что a есть наибольшая скорость, какую можетъ пріобрѣсти тѣло, свободно падающее въ сопротивляющейся жидкости. Отношеніе этой величины къ прочимъ опредѣляется формулою

$$g_1 = \frac{\lambda\Delta a^2}{m}$$

Откуда

$$a^2 = \frac{mg_1}{\lambda\Delta}.$$

Но $mg_1 = p$ есть вѣсъ тѣла въ разсматриваемой жидкости; слѣдоват., для одной и той же жидкости и для тѣлъ одной и той же формы и объема величина a будетъ пропорціональна корню квадратному изъ относительныхъ вѣсовъ этихъ тѣлъ въ разсматриваемой жидкости. Очевидно также, что она будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше плотность среды. Припоминая, что вѣсъ p тѣла въ жидкости равенъ $P\left(1 - \frac{\Delta}{\delta}\right)$, мы можемъ написать

$$a^2 = \frac{P(\delta - \Delta)}{\lambda\Delta\delta}.$$

Откуда видно, что чѣмъ ближе будетъ плотность тѣла къ плотности среды, тѣмъ менѣе будетъ величина a.

Обратимся опять къ уравненію А. Очевидно, что величина $e^{-\frac{g_1 t}{a}}$, входящая въ это уравненіе, тѣмъ быстрѣе приближается къ нулю, чѣмъ менѣе a. Отсюда слѣдуетъ, что равномѣрное движеніе падающаго тѣла наступаетъ тѣмъ скорѣе, чѣмъ ближе плотность этого тѣла къ плотности жидкости.

Приложимъ эти разсужденія къ шару. Для шара, какъ мы видѣли,

$$R = \frac{1}{2} K\pi r^2 \Delta v^2$$

и, значитъ,

$$\lambda = \frac{1}{2} K\pi r^2.$$

Поэтому

$$a^2 = \frac{mg_1}{\lambda\Delta} = \frac{p}{\lambda\Delta} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\delta}{\frac{1}{2}K\pi r^2\Delta} = \frac{8\,r\delta}{3\,K\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Такъ какъ a есть нѣкоторая скорость, то можно написать

$$a^2 = 2g_1 h,$$

гдѣ h есть высота, съ которой должно упасть тѣло подъ вліяніемъ своего вѣса въ жидкости, чтобы пріобрѣсти скорость a. Сравнивая съ предъидущимъ, получимъ по сокращеніи

$$g_1 h = \frac{4r}{3} \cdot \frac{\delta}{K\Delta}.$$

При $K = \frac{1}{2g}$, получаемъ правило Ньютона: наибольшая скорость,

какую можетъ пріобрѣсти падающій шаръ въ сопротивляющейся жидкости, соотвѣтствуетъ паденію тѣла подъ вліяніемъ его относительнаго вѣса (ponderis sui comparativi) съ такой высоты, которая относится къ $\frac{4}{3}$ діаметра шара, какъ плотность шара къ плотности среды. (Propos. XXXVIII, Corol. 2).

По формулѣ (14) можно вычислить абсолютную величину a, зная вѣсъ шара въ сопротивляющейся жидкости и плотность этой жидкости.

Разсмотримъ теперь движеніе тѣла, брошеннаго вверхъ по вертикальному направленію съ нѣкоторою начальною скоростію c. Очевидно, что для тѣлъ, средняя плотность которыхъ больше, нежели плотность сопротивляющейся среды, движеніе будетъ замедляться не только вслѣдствіе сопротивленія, но и вслѣдствіе дѣйствія ихъ относительнаго вѣса. Предполагая, какъ прежде, что тѣло симметрично относительно оси, совпадающей съ направленіемъ движенія, и оставляя всѣ прежнія обозначенія, получимъ для ускоряющей силы выраженіе

$$-g_1 - \frac{g_1 v^2}{a^2}$$

Уравненіе движенія будетъ

$$\frac{dv}{dt} = -g_1 - \frac{g_1 v^2}{a^2}$$

или

$$\frac{g_1 dt}{a} = -\frac{a dv}{a^2 + v^2} \quad \ldots\ldots (15)$$

Интегрируя и полагая, что начальная скорость тѣла есть c, получимъ

$$\frac{g_1}{a} t = \text{arc.tg.}\left(\frac{c}{a}\right) - \text{arc.tg.}\left(\frac{v}{a}\right) \quad \ldots\ldots (16)$$

Но по правиламъ тригонометріи имѣемъ вообще

$$\text{arc.tg}\alpha - \text{arc.tg}\beta = \text{arc.tg.}\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$$

На основаніи этого

$$\frac{g_1}{a} t = \text{arctg}\frac{\frac{c}{a} - \frac{v}{a}}{1 + \frac{vc}{a^2}}$$

или

$$\text{tg}\frac{g_1 t}{a} = \frac{\frac{c}{a} - \frac{v}{a}}{1 + \frac{vc}{a^2}} \quad \ldots\ldots (16)$$

Опредѣляя отсюда v, получимъ

$$v = a\,\frac{\frac{c}{a} - \text{tg}\frac{g_1 t}{a}}{1 + \frac{c}{a}\text{tg}\frac{g_1 t}{a}}$$

или

$$v = a\,\frac{c\cos\frac{g_1 t}{a} - a\sin\frac{g_1 t}{a}}{a\cos\frac{g_1 t}{a} + c\sin\frac{g_1 t}{a}}$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить величину скорости v для какого угодно времени.

Умножая эту величину на dt и замѣчая, что $vdt = dx$

$$dx = \frac{c\cos\frac{gt}{a} - a\sin\frac{gt}{a}}{a\cos\frac{gt}{a} + c\sin\frac{gt}{a}}\,adt.$$

Интегралъ этого уравненія, въ предположеніи, что при $t = o$ было $x = o$, напишется

$$x = \frac{a^2}{g_1}\,lg\left(\frac{c}{a}\,\sin\frac{g_1 t}{a} + \cos\frac{g_1 t}{a}\right)$$

Изъ этого уравненія опредѣлится величина пройденнаго пространства для даннаго времени.

Изъ уравненія (15) легко опредѣлить зависимость между пройденнымъ пространствомъ и скоростью. Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ сюда величину dt изъ уравненія $dx = vdt$, получимъ

$$g_1 dx = -\frac{a^2 v dv}{a^2 + v^2},$$

откуда

$$x = \frac{a^2}{2g_1}.\,lg\,\frac{a^2 + c^2}{a^2 + v^2}$$

Опредѣлимъ наибольшую высоту, какой можетъ достигнуть брошенное тѣло. Очевидно, она отвѣчаетъ скорости $v = o$. Обозначая ее h, будемъ имѣть

$$h = \frac{a^2}{2g}.\,lg\,\frac{a^2 + c^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Изъ уравненія (16), полагая $v = o$, опредѣлимъ время, какое должно быть употреблено тѣломъ для достиженія этой высоты. Обозначимъ его черезъ t_1.

$$t_1 = \frac{a}{g_1}\,arc.tg.\,\frac{c}{a}$$

Достигнувъ высоты h, тѣло будетъ падать подъ вліяніемъ силы тяжести, какъ это разсмотрѣно нами ранѣе. Опредѣлимъ время паденія и величину скорости, какую тѣло будетъ имѣть, достигнувъ земной поверхности. Обозначая c_1 эту скорость, изъ уравненія C получимъ

$$h = \frac{a^2}{2g}\,lg\frac{a^2}{a^2 - c_1^2}.$$

Изъ того же уравненія и изъ уравненія (17) находимъ

$$\frac{a^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2 - c_1^2},$$

откуда

$$c_1^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Очевидно $c_1 < c$, т. е., брошенное по вертикальному направленію тѣло возвратится съ меньшею скоростію, нежели та, какая была первоначально сообщена ему. Время паденія опредѣлится изъ уравненія (10),

$$g_1 t = \frac{1}{2} \operatorname{alg} \frac{a + v}{a - v},$$

въ которомъ v надо замѣнить черезъ c_1. Обозначая t_2 время паденія, будемъ имѣть

$$g_1 t_2 = \frac{1}{2} \operatorname{alg} \frac{a + c_1}{a - c_1};$$

а подставляя c_1 изъ уравненія (18), получимъ

$$t_2 = \frac{a}{2g_1} \lg \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + c}{\sqrt{a^2 + c^2} - c} = \frac{a}{g} \lg \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2} - c}$$

Сумма $t_1 + t_2$ выразитъ время восхожденія и паденія тѣла, въ зависимости отъ начальной скорости c. Обозначая его T, будемъ имѣть

$$T = t_1 + t_2 = \frac{a}{g_1} \operatorname{arc.tg} \frac{c}{a} + \frac{a}{g_1} \lg \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2} - c}$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить α, т. е., наибольшую скорость, какой можетъ достигнуть данное тѣло въ сопротивляющейся жидкости, если извѣстна первоначальная скорость его c и если наблюдены моменты начала восхожденія и конца паденія. А зная величину скорости a, можемъ изъ уравненія

$$a^2 = \frac{mg_1}{\lambda \Delta}$$

опредѣлить коэффиціентъ λ, входящій въ выраженіе сопротивленія

$$R = \lambda \Delta v^2.$$

Движеніе тѣлъ, которыхъ плотность меньше, нежели плотность среды, совершается по тѣмъ же законамъ, что и паденіе тѣлъ, если только плотность среды постоянна, какъ это имѣетъ мѣсто для капельныхъ жидкостей.

Въ самомъ дѣлѣ, ускоряющая сила въ этомъ случаѣ направлена противоположно силѣ тяжести, и можетъ быть выражена

$$-g\left(1 - \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

Но въ скобкахъ находится отрицательная величина, а потому произведеніе будетъ величиною положительною. Обозначая его g_1, мы можемъ написать уравненіе движенія въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dv}{dt} = g_1 - g_1 \frac{v^2}{a^2},$$

случай, нами уже разсмотрѣнный.

Гораздо болѣе трудностей представляетъ тотъ случай, когда плотность среды измѣняется съ высотою. Мы не будемъ здѣсь разсматривать его; напишемъ только дифференціальное уравненіе движенія.

Обозначимъ z высоту какой нибудь точки надъ поверхностью земли,

И пусть $\Delta = f(z)$ будетъ плотность воздуха въ этой точкѣ. Обозначимъ еще

$$\frac{\Delta}{\delta} - 1 = \varphi(z).$$

Тогда дифференціальное уравненіе движенія можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g.\varphi(z)\left(1 - \frac{1}{a^2}.\frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

или

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g.\varphi(z) - \frac{g}{a^2}.\ \varphi(z).\ \frac{dz^2}{dt^2}$$

ПРИЛОЖЕНІЕ 3-е.

ТЕОРІЯ ДАНІИЛА БЕРНУЛЛИ и ЭЙЛЕРА.

(Составилъ по Эйлеру Н. Ѳ. Іорданскій).

Даніилъ Бернулли въ запискахъ петербургской академіи наукъ [1]) и Леонардъ Эйлеръ въ примѣчаніяхъ къ сочиненію Робинса (Новые принципы артиллеріи [2]) основали теорію сопротивленія на разсмотрѣніи дѣйствія безконечно тонкихъ жидкихъ струй, которыя, обходя кругомъ тѣла, изгибаются подъ бо́льшимъ или меньшимъ угломъ.

Мы изложимъ эту теорію такъ, какъ она развита Эйлеромъ въ вышеупомянутыхъ примѣчаніяхъ [3]).

Эйлеръ замѣчаетъ, прежде всего, что такой идеальной жидкости, какую разсматриваетъ Ньютонъ въ своей первой теоріи, и какую вслѣдъ за нимъ предполагаетъ обыкновенная теорія,—не существуетъ въ дѣйствительности; а потому и сопротивленіе, испытываемое движущимися тѣлами въ дѣйствительныхъ жидкостяхъ, отличается отъ того, какое слѣдовало бы по теоріи. Эйлеръ разсматриваетъ главнымъ образомъ воздухъ.

Тѣло, помѣщенное въ воздухѣ, испытываетъ въ состояніи покоя со всѣхъ сторонъ равное давленіе. Если же это тѣло привести въ движеніе, то оно не только подвергается давленію окружающей среды, но испытываетъ еще дѣйствіе силы, происходящей отъ удара воздушныхъ частицъ.

Пока скорость тѣла незначительна, можно допустить, что давленіе

---

[1]) Commentarii Academiæ imperialis Petropolitanæ. T. VIII, 1836 года, стр. 99.

[2]) Мы имѣли подъ руками французскій переводъ этой книги: Nouveaux, principes d'artillerie de M. B. Robins, traduits de l'Allemand par Lombard, 1783.

[3]) Chap. II, 3 remarque, p. 306.

жидкости равномѣрно со всѣхъ сторонъ. Въ этомъ случаѣ сопротивленіе зависитъ только отъ удара частицъ. Если же тѣло имѣетъ значительную скорость, то давленіе уже не можетъ быть равномѣрнымъ и потому сопротивленіе будетъ зависѣть не только отъ удара частицъ, но и отъ разности давленій въ различныхъ частяхъ поверхности тѣла. Особенное значеніе имѣетъ въ этомъ случаѣ задняя часть поверхности. Если тѣло движется съ очень большой скоростью, такъ что жидкость не успѣваетъ за нимъ слѣдовать, то можетъ случиться, что задняя часть поверхности вовсе не будетъ испытывать давленія. Вслѣдствіе этого давленіе на переднюю часть ничѣмъ не будетъ уравновѣшиваться и всею своей величиной будетъ прибавляться къ тому сопротивленію, какое воздухъ оказываетъ на переднюю часть поверхности.

Понятно, что и при малой скорости давленіе на заднюю часть поверхности всегда меньше, нежели на переднюю, и что вслѣдствіе этой разности увеличивается сопротивленіе, испытываемое движущимся тѣломъ. Эти соображенія справедливы для всякой жидкости — упругой и неупругой. Въ жидкостяхъ упругихъ, какъ, напр., воздухъ, необходимо принять во вниманіе еще одно обстоятельство, именно—ихъ способность сжиматься и расширяться. Воздухъ, прилегающій къ передней части движущагося тѣла, имѣетъ бо́льшую плотность, нежели позади тѣла. Ясно, что это также способствуетъ увеличенію сопротивленія.

Итакъ, на основаніи предыдущаго, тѣло, движущееся въ жидкости, находится подъ вліяніемъ двухъ силъ: одна происходитъ отъ удара частицъ жидкости, другая—отъ неравенства давленій, испытываемыхъ тѣломъ.

Мы разсмотримъ здѣсь дѣйствіе только первой изъ этихъ силъ. Въ теоріи Ньютона и въ обыкновенной теоріи предполагается, что частицы жидкой среды неопредѣленно долгое время сохраняютъ всю ту скорость, какую онѣ получили отъ движущагося тѣла. Въ дѣйствительности же, частицы жидкости расходятся во всѣ стороны по бокамъ тѣла и сохраняютъ весьма малую часть сообщеннаго имъ количества движенія, если только тѣло не имѣетъ очень большой скорости. Представимъ, что на переднюю плоскость тѣла ударяетъ жидкость по направленію перпендикулярному къ плоскости, со скоростью v. Если бы частицы жидкости могли сохранить все свое движеніе, то поверхность тѣла не испытывала бы никакого давленія. Но по мѣрѣ приближенія частицъ къ поверхности измѣняется какъ скорость, такъ и направленіе ихъ движенія. Оттого эта поверхность будетъ испытывать давленіе, котораго величина вполнѣ отвѣчаетъ (равна) силѣ, способной произвести измѣненія въ движеніи частицъ. Пусть нѣкоторая весьма тонкая струя жидкости въ какой нибудь точкѣ своего пути начинаетъ уклоняться отъ своего первоначальнаго нормальнаго направленія и двигаться по другому косвенному направленію. Представимъ для простоты, что она движется какъ бы въ нѣкоторомъ кривомъ каналѣ. Скорость теченія струи измѣняется въ зависимости отъ поперечнаго сѣченія канала. Пусть a есть первоначальный весьма малый разрѣзъ струи; z разрѣзъ ея въ нѣкоторомъ произвольно выбранномъ мѣстѣ. Положимъ, что начальная скорость въ точкѣ a была v, а въ точкѣ z она

равна V. Такъ какъ количества жидкости, протекающія чрезъ различныя поперечныя сѣченія воображеннаго канала, должны быть равны, то

$$\frac{a}{z}=\frac{V}{v}.$$

Примемъ точку a за начало координатъ; линію нормальную къ плоскости за ось y-овъ, а линію къ ней перпендикулярную, за ось x-въ. И пусть координаты точки z суть x и y. Назовемъ элементъ канала, около мѣста z, чрезъ ds.

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+p^2},$$

полагая $\frac{dy}{dx}=p$.

Масса μ жидкости, содержащейся въ безконечно малой части канала, будетъ

$\mu=\Delta_1 zds=\Delta_1 zdx\sqrt{1+p_2}$, гдѣ Δ_1 есть плотность жидкости. Пусть ρ есть радіусъ кривизны канала въ мѣстѣ z. Извѣстно, что

$$\rho=\frac{-(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}.$$

Предъ выраженіемъ находится знакъ —, потому что кривая вогнута къ линіи абсциссъ.

На основаніи принциповъ механики сила F, способная произвести движеніе частицъ по кривой, которой радіусъ кривизны есть ρ, направлена по этому радіусу и равна

$$F=\frac{\mu V^2}{\rho},$$

гдѣ μ есть движущаяся масса. Подставляя сюда выраженія для μ и ρ, получимъ

$$F=-\frac{\Delta_1 zV^2dp}{1+p^2}$$

Кромѣ того, если каналъ расширяется въ мѣстѣ z, то скорость движущейся жидкости уменьшается. Для этого необходима сила, направленная по касательной къ каналу. Обозначивъ T эту силу, будемъ имѣть

$$T=-\mu\frac{dV}{dt}=-\Delta_1 z.ds\frac{dV}{dt}=-\Delta zVdV$$

Отрицательный знакъ — потому, что сила эта направлена противоположно дѣйствительному движенію жидкости.

Чтобы опредѣлить равнодѣйствующую силъ F и T, разложимъ ту и другую по направленію координатныхъ осей. Косинусы угловъ, образуемыхъ радіусомъ кривизны съ осями, выражаются соотвѣтственно

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{и} \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$

а углы касательной съ тѣми же осями имѣютъ косинусы

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ и } \frac{-1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Поэтому, сила F, направленная по радіусу кривизны, будетъ имѣть составляющія: вдоль оси y, т. е. линіи, перпендикулярной къ поверхности тѣла

$$= \frac{-\Delta_1 z V^2 dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ и вдоль оси x } = \frac{-\Delta_1 z V^2 p dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Точно также сила T будетъ имѣть составляющія: вдоль оси y

$$= \frac{\Delta_1 z p V dV}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

и вдоль оси x

$$= \frac{\Delta_1 z V dV}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Складывая составляющія, направленныя по линіи перпендикулярной къ поверхности тѣла, получимъ силу, дѣйствующую по этому направленію на элементъ жидкости въ мѣстѣ z:

$$-\frac{\Delta_1 z V^2 dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta_1 z p V dV}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Но $z = a\frac{v}{V}$.

Подставляя въ предъидущее выраженіе, получимъ

$$-\frac{\Delta_1 a v V dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta_1 a v p dV}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Интегралъ этого выраженія есть

$$\frac{-\Delta_1 a v . pV}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

Если опредѣлить надлежащимъ образомъ постоянное C, то этотъ интегралъ выразитъ силу, производящую измѣненія въ движеніи всего количества жидкости, содержащагося въ разсматриваемомъ жидкомъ каналѣ. Въ томъ мѣстѣ, гдѣ жидкость имѣетъ еще свою прежнюю скорость, величина $p = \frac{dy}{dx}$ будетъ $= \infty$, $V = v$ и сила $= 0$. Подставляя эти величины въ выраженіе, получимъ

$$C - \Delta_1 a v^2 = 0$$

Откуда

$$C = \Delta_1 a v^2.$$

Вставляя эту величину въ общее выраженіе силы, получимъ

$$\Delta_1 a v^2 - \frac{\Delta_1 a v\, pV}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Но $\frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$ есть косинусъ угла между первоначальнымъ направле-

ніемъ струи и измѣненнымъ ея направленіемъ. Обозначимъ β этотъ уголъ. Тогда предъидущее выраженіе принимаетъ видъ

$$\Delta_1 a v^2 (1 - \frac{V}{v} \cos\beta) \quad \ldots\ldots \quad (I).$$

Такъ выражается сила, съ какою движущаяся безконечно тонкая струя дѣйствуетъ на поверхность тѣла по перпендикулярному къ ней направленію. Очевидно, что эта сила, а слѣдовательно и сопротивленіе, испытываемое тѣломъ, зависитъ во-первыхъ отъ направленія, какое принимаетъ струя, уклоняясь отъ своего пути, во-вторыхъ отъ скорости, какую она сохраняетъ послѣ удара. Если бы струя теряла всю свою скорость, т. е. V было бы $= 0$, то сопротивленіе, испытываемое тѣломъ, выражалось бы $\Delta_1 a v^2$, т. е., равнялось бы вѣсу столба жидкости, котораго основаніе есть поперечный разрѣзъ струи, а высота равна удвоенной высотѣ, съ которой должно упасть тяжолое тѣло, чтобы пріобрѣсти скорость струи. Тоже самое получилось бы, если-бы уголъ β, на который измѣнилось направленіе струи, былъ равенъ $90°$, т. е. если-бы струя вслѣдствіе удара приняла направленіе, перпендикулярное къ своему первоначальному пути. Понятно, что если-бы всѣ струи, т. е., вся масса воды, дѣйствующая на переднюю поверхность тѣла, претерпѣвали подобныя измѣненія въ направленіи и скорости своего движенія, то сопротивленіе, испытываемое тѣломъ, выражалось бы также какъ въ обыкновенной теоріи удара, для случая неупругихъ частицъ жидкости, т. е., равнялось бы вѣсу столба жидкости, котораго основаніе есть площадь передняго сѣченія цилиндра, а высота равна удвоенной высотѣ, съ которой должно упасть тѣло, чтобы пріобрѣсти скорость жидкости.

Если бы струи отражались по тому же направленію, по которому онѣ ударились о поверхность тѣла (уголъ $\beta = 180$), и сохраняли прежнюю скорость ($V = v$), то сопротивленіе было бы равно $2\Delta_1 a v^2$, т. е.. соотвѣтствовало бы случаю абсолютно упругихъ частицъ въ обыкновенной теоріи сопротивленія.

Возвратимся къ формулѣ (I).

Если бы можно было для каждой безконечно тонкой струи знать уголъ, на который она уклоняется отъ первоначальнаго своего направленія при встрѣчѣ съ тѣломъ, и скорость, какую она сохраняетъ при этомъ, то можно было бы опредѣлить все сопротивленіе, испытываемое тѣломъ. Для этого нѣтъ надобности знать кривизну и поперечное сѣченіе струи во всѣхъ ея частяхъ; достаточно опредѣлить то и другое при концѣ ея. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы видно, что дѣйствіе всей части струи отъ ея начала но мѣста s зависитъ только отъ начальной и конечной ея скорости и отъ угла, между ея конечнымъ и начальнымъ направленіемъ. Но если бы мы прослѣдили струю до той точки, гдѣ она, обойдя тѣло, принимаетъ свою первоначальную скорость и направленіе, и распространили нашу формулу до этого крайняго предѣла, то нашли бы, что дѣйствіе струи $= 0$; т. е. тѣло какъ бы не испытываетъ никакого давленія. Ясно, значитъ, что въ прило-

женіяхъ формулы къ натуральнымъ жидкостямъ нельзя принимать за конечный предѣлъ тѣхъ точекъ жидкости, гдѣ она принимаетъ первоначальное свое движеніе. Не трудно понять, почему это такъ и должно быть: дѣйствительно величина силы, съ какою струя дѣйствуетъ на тѣло, возрастаетъ по мѣрѣ того, какъ увеличивается уголъ β, т. е.—пока къ тѣлу обращена выпуклая сторона струи. Когда же струя, стремясь принять свое прежнее направленіе, обращаетъ къ тѣлу свою вогнутую сторону, уголъ β уменьшается; а слѣдоват., уменьшается также и дѣйствіе струи на поверхность тѣла; и если въ какомъ нибудь мѣстѣ струя становится параллельной своему первоначальному направленію и получаетъ прежнюю скорость, то все дѣйствіе ея сводится къ нулю.

Итакъ, если жидкія струи обходятъ кругомъ тѣла, то необходимо различать въ каждой изъ нихъ двѣ части: одна, обращенная къ тѣлу своею выпуклостью, производитъ на него давленіе по направленію своего движенія съ силою $=\Delta_1 av^2(1-\frac{V}{v}\cos\beta)$; вторая, обращенная къ тѣлу вогнутой стороной, дѣйствуетъ въ противоположномъ направленіи. Но такъ какъ тѣло можетъ быть приведено въ движеніе только дѣйствительнымъ давленіемъ, то эта послѣдняя сила только въ томъ случаѣ произвела бы дѣйствіе на тѣло, когда жидкость была бы достаточно сжата позади тѣла. Между тѣмъ въ воздухѣ и въ водѣ давленіе на переднюю часть тѣла обыкновенно больше, нежели на заднюю. Оттого сила, происходящая отъ задней части жидкой струи, не производитъ никакого дѣйствія или производитъ весьма слабое дѣйствіе на тѣло, и такимъ образомъ все давленіе струи приводится къ дѣйствію только передней части. Отсюда ясно, также, что если бы жидкость была безконечно тонка (deliée) и находилась подъ безконечно большимъ давленіемъ (comprimée par une force infiniment grand), то задняя часть жидкой струи могла бы произвести свое полное дѣйствіе, и тѣло не испытывало бы никакого сопротивленія при движеніи въ жидкости подобнаго рода. Такими свойствами (по мнѣнію Эйлера) обладаетъ, быть можетъ, небесная матерія, эфиръ, въ которомъ происходитъ движеніе планетъ и кометъ. Понятно, что ни воздухъ, ни вода, ни вообще какая бы то ни была изъ извѣстныхъ намъ жидкостей не обладаютъ этими свойствами.

Чтобы составить себѣ болѣе или менѣе ясное представленіе о величинѣ давленія, испытываемаго тѣломъ, вообразимъ цилиндръ, помѣщенный внутри жидкости, которая движется съ нѣкоторою скоростію.

Раздѣлимъ мысленно жидкость на безчисленное множество безконечно тонкихъ нитей. Очевидно, давленіе, испытываемое цилиндромъ, выражается суммою всѣхъ частныхъ давленій, какія производитъ въ отдѣльности каждая струя. Струя, ближайшая къ оси цилиндра, изгибается подъ прямымъ угломъ; слѣдоват., давленіе, оказываемое ею, измѣряется вѣсомъ столба жидкости, котораго основаніе есть поперечное сѣченіе струи, а высота=удвоенной высотѣ, съ которой должно упасть тяжелое тѣло, чтобы пріобрѣсти скорость струи. Слѣдующая и дальнѣйшая струя изгибаются все подъ меньшимъ и меньшимъ угломъ, а оттого уменьшается и давленіе, ими производимое. Отсюда слѣдуетъ, что полное дав-

леніе, испытуемое цилиндромъ, должно быть гораздо меньше, чѣмъ то слѣдуетъ изъ обыкновенной теоріи удара.

Если передняя поверхность тѣла не представляетъ плоскости, а ограничена выпуклостью или оканчивается остріемъ, то сопротивленіе уменьшается, такъ какъ уменьшаются углы изгибанія жидкихъ струй.

ПРИЛОЖЕНІЕ 4-е.

ТЕОРІЯ НОРДМАРКА.

По сочиненію: Principes d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Par Zacarie Nordmark (St. Pétersbourg. 1808). Составилъ Н. Ѳ. Іорданскій.

Нордмаркъ выводитъ законъ *прямаго* сопротивленія (résistance directe) тѣмъ же путемъ, какъ это сдѣлалъ и Ньютонъ для сплошныхъ жидкихъ срединъ, т. е. на основаніи истеченія жидкостей изъ цилиндрическаго сосуда чрезъ круговое отверстіе въ днѣ его. Нордмаркъ разсматриваетъ различные виды катарактовъ въ зависимости отъ формы отверстія и даетъ уравненіе поверхности катаракта для того случая, который былъ разсмотрѣнъ Ньютономъ (См. прибавленіе 1-е, чер. 136—138). Опредѣляя, затѣмъ, давленіе q, испытываемое кружкомъ PQ въ случаѣ истеченія воды, и сравнивая это давленіе съ тѣмъ, p, какое испытывалъ бы кружокъ, если бы жидкость находилась въ покоѣ, Нордмаркъ приходитъ къ слѣдующему результату: p такъ относится къ q, какъ площадь AB къ площади AB+EF—PQ. У Ньютона отношеніе между давленіями было, какъ мы видѣли:

$$\frac{p}{\frac{1}{2}q} = \frac{\text{площ. EF}}{\text{площ. (EF}-\frac{1}{2}\text{PQ)}}.$$

Когда EF становится весьма велика относительно PQ и AB весьма велико относительно EF, то отношеніе

$$\frac{\text{площ. AB}}{\text{площ. (AB+EF—PQ)}}$$

приближается къ единицѣ, и p дѣлается $=q$, т. е., сопротивленіе, испытываемое круговою пластинкою, когда неограниченная жидкость движется перпендикулярно къ плоскости ея, или, что все равно, когда сама пластинка движется съ такою же скоростію, равно вѣсу жидкаго столба, котораго основаніе есть площадь пластинки, а высота равна той высотѣ, съ какой должно упасть тяжолое тѣло, чтобы пріобрѣсти скорость движущейся жидкости.

Мы уже видѣли, что, на основаніи принятаго Ньютономъ отношенія между p и q, величина сопротивленія, испытываемаго пластинкою, получалась вдвое менѣе.

Переходя къ опредѣленію сопротивленія при косвенномъ направленіи движенія (résistance oblique), Нордмаркъ замѣчаетъ, что полное ана-

литическое его выраженіе содержало бы безчисленнае множество членовъ, вслѣдствіе чего разсчетъ самыхъ простѣйшихъ опытовъ былъ бы въ высшей степени затруднителенъ. Но между этими членами два заслуживаютъ, по мнѣнію Нордмарка, особеннаго вниманія. Первый соотвѣтствуетъ той части сопротивленія, которая происходитъ отъ инерціи частицъ жидкости; онъ совершенно тождественъ съ выраженіемъ сопротивленія въ обыкновенной теоріи, т. е.,

$$P = \frac{\Delta S v^2 \sin^3\alpha}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Второй зависитъ отъ тренія ударяющихся жидкихъ частицъ о поверхность тѣла. Нордмаркъ принимаетъ его какъ необходимое слѣдствіе опытовъ, которые показываютъ, что треніе пропорціонально величинѣ трущихся поверхностей, давленію, какое онѣ испытываютъ при этомъ, и—скорости движенія. Эти положенія Нордмаркъ допускаетъ, какъ postulatum, и на основаніи ихъ слѣдующимъ образомъ находитъ величину сопротивленія, зависящую отъ тренія:

Пусть f есть коеффиціентъ тренія.

Величина поверхности, испытывающей треніе, есть (какъ прежде) S.

Давленіе на единицу поверхности $= \frac{\Delta_1 v^2}{2g} \sin\alpha$.

Скорость движенія жидкой струи по поверхности (т. е., составляющая скорости, параллельная поверхности)$= v\cos\alpha$.

Перемножая всѣ эти количества, находимъ слѣдующее выраженіе для величины сопротивленія, направленнаго вдоль ударяемой плоскости:

$$\frac{\Delta_1 f S v^3}{2g} \cos\alpha \sin\alpha.$$

Умножая на $\cos\alpha$, чтобы получить равнодѣйствующую, параллельную съ направленіемъ движенія, и обозначая F величину сопротивленія, будемъ имѣть

$$F = \frac{\Delta_1 f S v^3}{2g} \cos^2\alpha \sin\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Или, введя мидель M вмѣсто величины S поверхности,

$$F = \frac{\Delta_1 f M v^3}{2g} \cos^2\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Отсюда видно, что сопротивленіе, зависящее отъ тренія, пропорціонально третьей степени скорости и квадрату косинуса угла между направленіемъ движенія и поверхностью движущагося тѣла.

Полное сопротивленіе R равняется суммѣ P+F.

Когда передняя поверхность движущагося тѣла имѣетъ нѣсколько граней, пересѣкающихся по линіямъ, перпендикулярнымъ къ направленію движенія, то каждый изъ членовъ P и F, въ приложеніи ко всѣмъ гранямъ, за исключеніемъ передней, распадается на два. Тоже самое будетъ, если тѣло имѣетъ кривую поверхность. Зависитъ это отъ того, что струя жидкости, ударившаяся о первую грань, скользитъ по ней и переливается на слѣдующую грань черезъ ребро, раздѣляющее обѣ эти

грани. При этомъ она встрѣчается подъ нѣкоторымъ угломъ со струею, ударяющеюся о вторую грань, и дѣйствуетъ измѣняющимъ образомъ на направленіе и силу удара, ею производимаго. Отъ этого, очевидно, должно измѣниться и давленіе, испытываемое второю гранью. Обозначимъ α_1 и α_2 углы первой и второй грани съ направленіемъ движенія.

Скольженіе жидкости по первой грани и переливаніе ея черезъ ребро происходитъ подъ вліяніемъ силы (разсчитанной на единицу поперечнаго разрѣза струи) $\frac{\Delta_1 v^2}{2g}\cos\alpha_1$. Составляющая этой силы, перпендикулярная къ поверхности второй грани, выразится:

$$\frac{\Delta_1 V}{3g}\cos\alpha_1 . \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Она направлена противоположно прямому дѣйствію жидкости на вторую грань, которое выражается

$$\frac{\Delta_1 M_2 v^2 \sin\alpha_2}{2g} \ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ M_2 есть мидель, соотвѣтствующій второй грани, или, что одно и тоже—поперечное сѣченіе нормальной жидкой струи, дѣйствующей на эту грань. Обозначимъ также M_1 поперечное сѣченіе струи, ударяющейся о первую грань. Если $M_2 < M_1$, то дѣйствіе жидкости, перелившейся черезъ ребро, распространяется на всю вторую грань, т. е. выраженіе (4) должно быть умножено на M_2. Вычитая полученное такимъ образомъ произведеніе изъ выраженія (5) и умножая на $\sin\alpha_2$, чтобы получить равнодѣйствующую, параллельную съ направленіемъ движенія, получимъ слѣдующее выраженіе для величины давленія, испытываемаго второю гранью:

$$P = \frac{\Delta_1 M_2 v^2}{2g}\left[\sin^2\alpha_2 - \cos\alpha_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2).\sin\alpha_2\right] \ldots (6)$$

Если $M_2 > M_1$, то дѣйствіе перелившейся струи распространяется не на всю вторую грань, а только на такую часть ея, которой мидель $= M_1$. Въ этомъ случаѣ отрицательный членъ въ выраженіи будетъ содержать множителя M_1 вмѣсто M_2, такъ что

$$P = \frac{\Delta_1 v^2}{2g}\left[M_2 \sin^2\alpha_2 - M_1 \cos\alpha_1 . \sin(\alpha_1 - \alpha_2).\sin\alpha_2\right].$$

Чтобы выразить оба эти случая одною формулою, обозначимъ μ меньшую изъ величинъ M_1 и M_2. Тогда P напишется въ слѣдующемъ видѣ

$$P = \frac{\Delta_1 v^2}{2g}\left[M_2 \sin^2\alpha - \mu . \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 . \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right].$$

Подобными же разсужденіями нетрудно получить и выраженіе F, т. е., величину давленія, зависящаго отъ тренія жидкости о поверхность тѣла.

$$F = \frac{\Delta_1 f v_3}{2g}\left[M_2 \cos^2\alpha_2 - \mu \frac{\cos\alpha_1 \cos^2\alpha_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\alpha_2}\right].$$

Эти формулы имѣютъ мѣсто какъ въ томъ случаѣ, когда уголъ, образуемый гранями, будетъ выходящій ($\alpha_1 > \alpha_2$), такъ и въ томъ, когда

этотъ уголъ будетъ входящій ($\alpha_1 < \alpha_2$). Въ послѣднемъ случаѣ sin ($\alpha_1 - \alpha_2$) будетъ имѣть величину отрицательную, и, значитъ, прибавочные члены въ выраженіяхъ для P и F сдѣлаются положительными.

Подобныя же разсужденія Нордмаркъ распространяетъ и на кривыя поверхности. Въ случаѣ поверхностей вращенія, выраженіе для дифференціала P будемъ имѣть слѣдующій видъ:

$$dP = \frac{2\pi\Delta_1 v^2}{2g}\left[\frac{y dy^3}{ds^2} - \frac{y dy^2}{ds}\int\frac{dx}{\rho}\right],$$

дѣ ρ есть радіусъ кривизны производящей кривой. Точно также дифференціалъ отъ F выразится

$$dF = \frac{2\pi\Delta_1 f v^3}{2g}\left[\frac{y dy dx^2}{ds^2} - \frac{y dx^3}{2ds}\int\frac{dx}{\rho}\right].$$

Прилагая эти формулы къ шару, получимъ

$$P = \frac{\Delta_1 v^2}{2g}\cdot\frac{5}{12}\pi r^2$$

и $$F = \frac{\Delta_1 f v^3}{2g}\cdot\frac{1}{12}\pi r^2,$$ гдѣ r есть радіусъ шара.

Полное сопротивленіе R, испытываемое шаромъ, будетъ

$$R = P + F = \frac{\Delta_1 v^2}{2g}\cdot\frac{5}{12}\pi r^2 + \frac{\Delta_1 f v^3}{2g}\cdot\frac{1}{12}\pi r^2.$$

Сопротивленіе, испытываемое конусомъ, движущимся по направленію оси въ сторону вершины, равняется (см. прибав. 1-е, черт. 142):

$$R = \frac{\Delta\pi v^2}{2g} r^2 \sin^2\beta + \frac{\Delta\pi f v^3}{2g} r^2 \cos^2\beta.$$

Приложеніе 5-е.

О СОПРОТИВЛЕНІИ ВОДЫ НА КОРАБЛЬ.

Докладъ 1869 г. британскому обществу для успѣховъ знанія; переведенъ изъ Report of the British Association for the avancement of science. Exeter. 1869 г. стр. 10. (Перевелъ Н. П. Азбелевъ).

Отчетъ комитета, состоявшаго изъ: г-на К. В. Меррифайльдъ Ч. У. К. О. [1]), г-на Биддера, капитана Дугласа Гальтона, г-на Ф. Галтона Ч. У. К. О., профессора Ранкина Ч. У. К. О. и г-на В. Фроуда. Комитетъ былъ назначенъ съ цѣлію изложить существующія свѣдѣнія объ остойчивости, движеніи и мореходныхъ качествахъ корабля; а также, согласно желанію Правительства Ея (британскаго) Величества, для обсужденія того, что можетъ быть сдѣлано по этому предмету. — Отчетъ составленъ г-мъ К. В. Меррифайльдъ.

Вопросъ о сопротивленіи можно разсматривать двоякимъ образомъ: или только въ главныхъ чертахъ, чтобы опредѣлить силу, потребную

[1]) Сокращеніе Ч. У. К. О. значитъ: членъ ученаго королевскаго общества.

для сообщенія кораблю извѣстной формы и размѣровъ опредѣленной скорости, или-же во всѣхъ деталяхъ, т. е. изслѣдовать точно всѣ обстоятельства, при которыхъ корабль и его двигатель дѣйствуютъ и противодѣйствуютъ на возмущаемую ими воду. До сихъ поръ какъ-то мало связывали детали явленія съ общимъ результатомъ; первымъ не придавали большаго значенія, да и въ выводахъ относительно мѣры сопротивленія всего корабля далеко не пришли еще къ опредѣленнымъ заключеніямъ.

Главные элементы, связанные съ сопротивленіемъ, суть: скорость движенія корабля, его обводы, состояніе его поверхности и абсолютныя размѣренія. Вліяніе формъ, которыя можно дать плавающему тѣлу, также разнообразно, какъ и число ихъ. Что же касается разницы въ размѣреніяхъ при одинаковыхъ геометрическихъ формахъ, то найдено, что корабли различной абсолютной величины испытываютъ сопротивленіе, непропорціональное послѣдней, какъ при движеніи на волненіи, такъ и на тихой водѣ. Мы увидимъ также, что абсолютная длина корабля, считаемая независимо отъ ширины и углубленія его, имѣетъ прямое вліяніе на сопротивленіе.

Въ сочиненіяхъ по гидродинамикѣ обыкновенно принимаютъ, что сопротивленіе воды возрастаетъ пропорціонально квадратамъ скорости движущагося тѣла. Но для цѣлей морской архитектуры законъ этотъ можетъ быть принятъ въ разсчетъ только, какъ весьма грубый, и только въ нѣкоторыхъ весьма тѣсныхъ предѣлахъ, внѣ которыхъ онъ значительно расходится съ наблюдаемыми фактами. Будетъ вѣрнѣе, если высказанный законъ считать справедливымъ не вообще, а только въ очень немногихъ случаяхъ. Эти случаи должны относиться къ кораблямъ *хорошей формы*, при движеніи ихъ со скоростью, представляющей нѣкоторую опредѣленную функцію отъ ихъ длины. Но выраженіе *хорошія формы* имѣютъ черезъ-чуръ неопредѣленное значеніе, такъ какъ до сихъ поръ еще не найдено, какіе обводы корабля надо считать наилучшими. Когда соотношеніе между длиною и скоростью не удовлетворяетъ упомянутой функціи, то сопротивленіе возрастаетъ гораздо быстрѣе, чѣмъ квадраты скорости, а именно сопротивленіе нерѣдко увеличивается даже пропорціонально кубамъ скорости.

Замѣтимъ, что работа машины HP, потребная для движенія корабля, получится, если силу R сопротивленія мы умножимъ на скорость V, слѣдовательно *главныя формулы* сопротивленія воды суть:

$$R = V^2 \mathrm{Const},$$
$$HP = \mathrm{Const}\ RV = \mathrm{Const}\ V^3;$$

послѣдняя вытекаетъ, какъ строго необходимое слѣдствіе первой. Относительно этого пункта мнѣнія ученыхъ расходятся мало; но какъ только возникаютъ попытки опредѣлить значенія постоянныхъ величинъ (Const.) въ этихъ уравненіяхъ или ввести поправки, зависящія отъ мало изслѣдованныхъ деталей явленія, такъ являются значительныя разногласія.

Главные элементы сопротивленія воды на движущееся въ ней тѣло суть:

1) *Прямое переднее сопротивленіе*, происходящее вслѣдствіе работы возмущенныхъ частицъ воды, расходящихся на право и на лѣво, съ вертикальнымъ движеніемъ или безъ него, чтобы дать дорогу тѣлу.

2) *Поверхностное сопротивленіе* (skin resistance), или треніе воды о поверхность движущагося тѣла, совокупно съ дѣйствіемъ поверхностныхъ водоворотовъ и другихъ мелкихъ явленій.

3) *Заднее давленіе* (back pressure), происходящее отъ уменьшеннаго давленія на заднюю часть тѣла, и отъ такого же давленія за тѣми углами и неровностями поверхности его, которые могутъ образовать водовороты.

4) Въ придачу ко всему этому существуютъ еще прилипаніе (капилярность, сцѣпленіе) и вязкость воды. Они важны при движеніи въ водѣ мелкихъ тѣлъ, включая сюда и малыя модели; но для большихъ кораблей вліяніе ихъ достаточно считать нѣкоторыми постоянными величинами, входящими въ поверхностное треніе. Поэтому на практикѣ этимъ четвертымъ пунктомъ можно пренебречь; при опытахъ-же съ моделями его слѣдуетъ принимать во вниманіе.

Кажется, что при обыкновенныхъ обводахъ корабля первые три главные элемента сопротивленія нельзя подчинить одному условію; но есть причины думать, что для судовъ *нѣкоторой формы* они, съ достаточной степенью приближенія, возрастаютъ пропорціонально квадратамъ скорости; и кажется также, что при этихъ именно формахъ корабль испытываетъ, *cæteris paribus*, наименьшее сопротивленіе. При этихъ обстоятельствахъ изъ формулы, выражающей поверхностное сопротивленіе, можно получить формулы для другихъ элементовъ черезъ перемѣну въ ней постоянныхъ величинъ. Мы полагаемъ, что когда ученые говорятъ, что нѣкоторыми элементами сопротивленія на практикѣ можно пренебречь, то они подразумѣваютъ подъ этимъ, что ихъ можно выразить нѣкоторыми постоянными величинами, которыя тѣмъ или другимъ образомъ опредѣляются изъ опытовъ. Мы сказали раньше: суда *нѣкоторой формы*; эта форма еще не опредѣлена, исключая немногихъ отрицательныхъ свойствъ ея, да и то довольно неопредѣленныхъ. Къ числу такихъ свойствъ принадлежитъ, напримѣръ, узкость носовой части корабля, хорошіе обводы, большая длина, не меньшая, чѣмъ длина трохоидальной волны, движущейся съ тою же скоростью. Не только мы не имѣемъ яснаго представленія объ обводахъ корабля, соотвѣтствующихъ наименьшему сопротивленію, но у насъ нѣтъ даже данныхъ для рѣшенія этой задачи [1]).

Первыя формулы, которыя необходимо привести, суть хорошо из-

[1]) Весьма поучительно, для пониманія современнаго состоянія кораблестроенія, часто опирающагося исключительно на Ранкина, запомнить, что въ той комиссіи, докладъ которой здѣсь печатается, участвовалъ тотъ самый проф. Ранкинъ, которому нѣкоторые приписываютъ мнѣнія, тождественныя съ тѣми, какія проводилъ Скотъ Россель по отношенію къ образованію для тѣла наименьшаго сопротивленія по волновой теоріи. – *Замѣтка Д. Менделѣева.*

вѣстные коэффиціенты парового дѣйствія корабля; а именно принимается за постоянное:

$$\frac{(\textit{Скорость})^3 \times (\textit{водоизмѣщеніе})^{2/3}}{\text{Индикаторная сила въ лошадяхъ.}}$$

$$\frac{(\textit{Скорость})^3 \times \textit{площадь миделеваго сѣченія.}}{\text{Индикаторная сила въ лошадяхъ.}}$$

Какъ средство для очень грубаго сравненія качествъ различныхъ кораблей, формулы эти чрезвычайно удобны; но въ теоретическомъ отношеніи онѣ даютъ очень мало. Даже для того-же самаго корабля, испытуемаго уже при тѣхъ же, повидимому, условіяхъ, эти коэффиціенты не представляютъ постоянныхъ количествъ. Кромѣ того, различныя составныя части паровой машины и двигателя, разсматриваемыя, какъ машины для передачи силы, неразрывно связаны съ работой противодѣйствующаго сопротивленія. Когда въ формулу вмѣсто I.H.P [1]) подставляютъ трату угля, то тогда въ нее входятъ также коэффиціенты полезнаго дѣйствія топки и пароваго котла. Нѣкоторыя изъ этихъ замѣчаній относятся и къ слѣдующей приближенной формулѣ Гаукслея:

$$\text{Скорость въ миляхъ} = 27\left(\frac{\text{дѣйствительная сила въ лошадяхъ}}{\text{смачиваемая поверхность въ кв. фут.}}\right)^{1/3};$$

она также употребляется только для грубыхъ цѣлей.

Упомянемъ здѣсь о формулѣ, данной г-мъ Гринъ, въ его отчетѣ, читанномъ въ институтѣ Франклина въ Нью-Іоркѣ и напечатанномъ въ сборникѣ «Mechanics Magazine» 8-го іюля 1864 года. Она основана на допущеніи, что сила, затрачиваемая на преодолѣніе задняго давленія и тренія въ машинѣ, мѣняется прямо пропорціонально скорости:

$$\text{H.P} = \text{D}^{\frac{2}{3}}\text{V}(.1552 + .0046846\text{V}^2);$$

постоянныя величины здѣсь опредѣлены эмпирически.

Новѣйшія формулы сопротивленія принимаютъ въ разсчетъ форму корабля и, такимъ образомъ, опредѣляютъ значеніе внѣшнихъ очертаній его поверхности. Шведъ Чапманъ въ своемъ извѣстномъ сочиненіи о судостроеніи предполагаетъ, что всю поверхность корабля можно разбить на малыя части, на каждую изъ которыхъ сопротивленіе будетъ пропорціонально проэкціи ея площади, квадрату синуса угла (паденія) и квадрату скорости; сюда вводится еще маленькая поправка, съ разсчетомъ на теченія, образуемыя собственнымъ движеніемъ корабля и умѣряющія давленія. Но онъ самъ изъ многочисленныхъ опытовъ своихъ имѣлъ причины сомнѣваться въ справедливости закона квадратовъ синусовъ и даже — квадратовъ скоростей, примѣнительно къ различнымъ формамъ корабля.

---

[1]) То есть: индикаторное число лошадиныхъ силъ (Indicated horsepower) паровой машины.—*Д. М.*

Эйлеръ [1]) и большая часть старыхъ писателей [2]) пользуются квадратами синусовъ (паденія), какъ факторами, выражающими дѣйствіе наклонности поверхности (oblquity); и эта теорія разсматривалась г-мъ Гаукслей въ его рѣчи въ институтѣ инженеровъ, изложенной въ ихъ «Запискахъ» за 1856 г. vol. XVI; стр. 356.

Но, по нашему мнѣнію, теперь обширныя опытныя данныя показываютъ, что справедливъ или нѣтъ этотъ законъ относительно безконечно малыхъ площадокъ плоской поверхности, приходящихъ въ соприкосновеніе съ элементарными частицами воды, — онъ рѣшительно несправедливъ въ примѣненіи къ плоскимъ поверхностямъ значительныхъ размѣровъ, а также и къ малымъ частямъ кривыхъ поверхностей. Очевидно, сюда не введено дѣйствіе струи, которая, обтекая вдоль поверхности, отклоняетъ паденіе воды на часть поверхности, слѣдующую за носовыми обводами. Допущеніе, что дѣйствіе это ничтожно, не принадлежитъ къ числу такихъ, которыя можно принять бездоказательно; да и опытъ показываетъ совсѣмъ другое.

Опыты французской академіи, а также опыты Бофуа и Чапмана, — всѣ свидѣтельствуютъ противъ гипотетическаго закона о квадратахъ синусовъ (угла паденія). Предположеніе, что законъ этотъ представляетъ дѣйствіе наклонности задней поверхности тѣла, еще болѣе подвержено сомнѣнію, чѣмъ предположеніе относительно передней поверхности.

Въ дополненіе къ этому предмету не безъинтересно будетъ привести слѣдующую выписку изъ сочиненія Дюпюи-де-Лома.

«Роммъ въ своихъ мемуарахъ, представленныхъ въ академію наукъ въ 1784 г., описывая опыты, сдѣланные имъ въ Рошфорѣ надъ моделями судовъ, а также и въ своемъ сочиненіи, Art de la Marine, очень ясно говоритъ, что сопротивленіе не зависитъ отъ формъ движущагося тѣла: «Мы видимъ», говоритъ онъ, что при правильныхъ и чрезвычайно согласныхъ ватерлиніяхъ, каковы у большей части новыхъ судовъ, отъ большей или меньшей полноты кормы или носа—сопротивленіе воды на корабль ни увеличивается, ни уменьшается».

«Какъ прямое опроверженіе этого краткаго и безъосновательнаго вывода, который долгое время тормозилъ движеніе впередъ морской архитектуры, — мои (Дюпюи-де-Лома) опыты привели къ слѣдующимъ пяти главнымъ заключеніямъ:

«1) У судовъ, подобныхъ геометрическихъ очертаній, различной длины, но съ одинаковой гладкостью подводныхъ поверхностей, и при одинаковой скорости ихъ движенія, сила, потребная для сообщенія имъ этой скорости, возрастаетъ медленнѣе, чѣмъ поверхность наибольшаго

---

[1]) Смотри его Scientia Navalis (St. Petersburg, 1749). Томъ I, стр. 213. Смотри также D'Alembert, «Traité de l'Equilibre et du Mouvement des fluides», изданіе 1770 г., стр. 226.

[2]) См. Shapman (by Juman), стр. 257; Bossut «Hydrodinamique», томъ II, стр. 396; Beaufoy, стр. 1, XXXVII. См. также Scott Rossel's Naval Architecture, стр. 168; или записки Гражданскихъ инженеровъ, vol. XXIII, стр. 346, все что о французскихъ опытахъ.

поперечнаго сѣченія. Будетъ близко къ истинѣ, если примемъ, что при подобныхъ обводахъ сопротивленіе при той же скорости увеличивается вмѣстѣ съ увеличеніемъ корабля въ отношеніи пропорціональномъ квадратнымъ корнямъ изъ радіусовъ кривизны сходственныхъ линій, если эти радіусы пропорціональны линейнымъ размѣреніямъ корабля; поэтому нельзя сравнивать сопротивленіе на различныя суда прямо по опытамъ надъ ихъ моделями [1]).

«2) Если одинъ и тотъ же корабль движется съ различными, но *малыми* скоростями, то сила, потребная для сообщенія ему этихъ скоростей, возрастаетъ медленнѣе, чѣмъ квадраты ихъ. При обыкновенныхъ скоростяхъ—отъ 3 до 5 метровъ въ секунду, смотря по степени гладкости смачиваемой поверхности, — сила увеличивается пропорціонально квадратамъ скоростей; при большихъ-же скоростяхъ увеличеніе ея быстрѣе, чѣмъ квадраты [2])».

«3) Уменьшеніе угла носовыхъ обводовъ и удлиненіе радіусовъ кривизны линій, по которымъ должна обтекать вода, особенно за кормою, при движеніи ея снизу вверхъ, — служатъ главнымъ средствомъ для уменьшенія сопротивленія. Вліяніе этого обстоятельства тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе движущая сила. При очень медленномъ движеніи значеніе обводовъ менѣе, чѣмъ значеніе поверхности тренія».

«4) Острота носа, надъ ватерлиніей и ниже ея, имѣющая вышеупомянутое значеніе на тихой водѣ,—представляетъ много замѣчательныхъ преимуществъ при бурной поверхности моря».

«5) Гладкость смачиваемой поверхности играетъ большую роль въ сопротивленіи; и вліяніе ея, какъ связанное съ треніемъ, мало мѣняется съ измѣненіемъ скоростей. «Прибавлю, что сопротивленіе на корабль значительно увеличивается въ узкихъ каналахъ, а тѣмъ болѣе въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ глубина мало превосходитъ углубленіе корабля; такъ что опыты всегда надо производить на глубокой водѣ».

«Наконецъ, изъ многочисленныхъ наблюденій надъ сопротивленіемъ, какъ на тихой водѣ, такъ и въ открытомъ морѣ, я вывелъ слѣдующую формулу, весьма близко согласную съ дѣйствительностью и принимаемую мною за мѣру сопротивленія»:

$$R=KS(V^2+0{\cdot}145V^3)+K^1S^1\sqrt[3]{V}.$$

«Въ этой формулѣ я называю:

S—площадь миделеваго сѣченія корабля въ квадратныхъ метрахъ.

S^1—произведеніе изъ средняго пояса (смачиваемаго) на длину между конечными перпендикулярами, выраженное въ квадратныхъ метрахъ.

V—скорость въ метрахъ въ секунду.

K—коэффиціентъ, мѣняющійся вмѣстѣ съ измѣненіемъ формъ и

---

[1]) Г. Ричъ, директоръ школы d'Application du Génie Maritime, давно уже указалъ на ошибочность сравненія сопротивленія на суда различныхъ формъ по опытамъ надъ моделями, движущимися со скоростями, соотвѣтственными скоростямъ самихъ кораблей.

[2]) Я говорю о судахъ плавающихъ, а не совсѣмъ погруженныхъ въ воду.— *Замѣтки французскаго автора.*

именно: уменьшающійся обратно пропорціонально квадратнымъ корнямъ изъ радіусовъ кривизны продольныхъ сѣченій; онъ уменьшается также вмѣстѣ съ среднимъ угломъ носовыхъ обводовъ. Это послѣднее уменьшеніе простирается до 15% въ то время, какъ средній уголъ носовыхъ обводовъ мѣняется отъ 45° до 15°; поэтому, между означенными предѣлами его приходится по $^1/_2$% на каждый градусъ.»

«K^1—коэффиціентъ, не зависящій отъ обводовъ, но измѣняющійся только вмѣстѣ съ гладкостью смачиваемой поверхности. Коэффиціентъ этотъ можетъ увеличиваться въ отношеніи 1 къ 10, отъ 0,3 для поверхностей чрезвычайно гладко покрытыхъ хорошей листовой мѣдью и при томъ, если шляпки болтовъ хорошо вогнаны во внутрь, — до 3,0, если подводная часть корабля покрыта раковинами и морскими травами».

«R—сопротивленіе, выраженное въ килограммахъ и соотвѣтствующее скорости V.

«Для каждаго испытуемаго корабля достаточно двухъ опытовъ для опредѣленія K и K^1.

«Для «Наполеона», когда мѣдь уже окислилась, но не была покрыта грязью, я нашелъ:

$$K=1{,}96, K^1=0{,}44;$$

отсюда я вывелъ общее выраженіе для сопротивленія на корабль, движущійся въ водѣ».

$$R=1.96S(V^2+0{,}145V^3)+0{,}440S^1\sqrt[3]{V}.$$

«Прямыя измѣренія показываютъ, что при испытаніи „Наполеона“ значенія S и S^1 колебались:

S—между 99 и 100 квадратными метрами.

S^1—между 1650 и 1610 квадратными метрами.

«Сила паровой машины, потребная для сообщенія кораблю данной скорости, найдется, если мы умножимъ эту послѣднюю на вычисленное по показанной формулѣ сопротивленіе.»

Вышеприведенныя замѣчанія заимствованы изъ мемуара, напечатаннаго г-номъ Дюпюи-де-Ломъ, по случаю кандидатуры его въ парижской академіи наукъ, въ 1865—66 годахъ. Оно перепечатано въ сборникѣ г-на Фляшатъ «Navigation à Vapeur transocéanienne», vol. 1. p. 206.

Г-нъ Бургуа въ своемъ мемуарѣ [1]) о сопротивленіи воды даетъ формулы, которыя можно соединить въ одну слѣдующую:

$$R=B^2V^2\left[K_1+K_2\frac{lV^2}{B^2}+K_3\frac{S}{B^2V}\right],$$

B^2—площадь миделеваго сѣченія, S — смачиваемая поверхность, а l—наибольшая ширина. K_1, K_2 и K_3 суть постоянные коэффиціенты, различные для различныхъ типовъ судовъ.

[1]) Изданномъ въ Парижѣ Артуромъ Бертраномъ. s. a. См. также Sonnet, „Dictionnaire des Matematiques Appliquées», Art. «Resistance de Fluide».

Вопросъ о сопротивленіи въ связи съ теоріей волнъ, кажется, впервые изложенъ Скоттъ-Росселемъ. Онъ первый, на сколько мнѣ извѣстно, замѣтилъ соотношеніе между длиною корабля и скоростью его истиннаго перемѣщенія, опредѣливъ это соотношеніе прямо изъ теоріи спутныхъ и трохоидальныхъ волнъ. Мы изложимъ его теорію сопротивленія въ возможно краткихъ словахъ.

Теорія Скоттъ-Росселя, изслѣдующая форму корабля, соотвѣтствующую наименьшему сопротивленію. Корабль по длинѣ можетъ быть раздѣленъ на три части: носовую, среднюю—прямолинейную и кормовую. Миделевое сѣченіе можетъ быть какой угодно формы, такъ какъ сопротивленіе на него зависитъ только отъ величины его площади и смачиваемаго пояса.

Носовая часть въ сѣченіяхъ по ватерлиніямъ должна давать кривыя синусовъ (гармоническія кривыя), уравненіе которыхъ можетъ быть написано такъ:

$$x=\frac{l\Theta}{\pi},\quad y={}^1/_2 b(1+\mathrm{Cos}\Theta).$$

Здѣсь b есть полуширота корабля по соотвѣтствующей ватерлиніи, а l—длина носовой части, которая для случая наименьшаго сопротивленія должна быть не меньше длины спутной (solitary) волны, движущейся съ такой-же скоростью, для какой предназначается корабль. Въ сѣченіяхъ по ватерлиніямъ кормовой части должны получаться трохоиды, уравненія которыхъ суть: $x=\frac{l_1\Theta}{\pi}+{}^1/_2 b\,\mathrm{Sin}\Theta$, $y={}^1/_2 b(1+\mathrm{Cos}\Theta)$; здѣсь l_1—представляетъ длину кормовой части, равную полу-длинѣ трохоидальной волны, движущейся со скоростью движенія самого корабля. Прямолинейная средняя часть можетъ быть какой угодно длины, такъ какъ измѣненіе послѣдней вліяетъ только на ту часть сопротивленія, которая увеличивается или уменьшается съ измѣненіемъ поверхности тренія. При соблюденіи всѣхъ этихъ условій, сопротивленіе на корабль будетъ выражаться формулой:

$$(KM+K^1S)V^2,$$

гдѣ M представляетъ площадь миделеваго сѣченія, а S — смачиваемую поверхность. K и K_1 суть коэффиціенты, изъ которыхъ первый съ грубымъ приближеніемъ можно считать равнымъ $^1/_{10}$ части сопротивленія, приходившагося бы на мидель, если-бы плоскость его была перпендикулярна къ линіи движенія, а послѣдній зависитъ отъ состоянія поверхности. При совсѣмъ клинообразныхъ носовыхъ обводахъ, которыхъ уголъ назовемъ черезъ ε, Скотъ-Россель выражаетъ сопротивленія чрезъ $\left[\frac{\pi}{2\pi-\varepsilon}\right]^2$, когда ε отъ 12° до 144°; если же носовые обводы представляютъ сочетаніе клинообразныхъ съ волновыми, то, какъ грубый способъ измѣренія сопротивленія, онъ предлагаетъ среднюю формулу, изъ волновой и той, которая выражаетъ сопротивленіе при клинообразныхъ обводахъ; при томъ, это соединеніе должно быть сдѣ-

лано такъ, чтобы геометрически оно представляло упомянутое сочетаніе обводовъ.

На сколько можно судить по запискамъ, изданнымъ Скоттъ Россельмъ, то есть нѣкоторыя неточности въ его теоріи образованія кормовой части. Форма носа есть ничто иное, какъ половина профиля спутной волны (если этотъ профиль повернемъ на прямой уголъ въ плоскости горизонта). Форма кормы также взята съ очертаній волны; а именно она получится, если углубленную часть послѣдней совсѣмъ наполнимъ водою; но нигдѣ ясно не сказано, должно ли давать вышеупомянутыя формы сѣченіямъ по ватерлиніямъ, или же продольнымъ вертикальнымъ сѣченіямъ; и, наконецъ, какъ согласить между собою тѣ и другія; кажется, что авторъ самъ не разрѣшилъ себѣ этого сомнѣнія. Опыты, произведенные недавно подъ управленіемъ комитета Британскаго общества, съ цѣлью опредѣлить разницу между сопротивленіемъ на тѣла плавающія и тѣла совсѣмъ погруженныя въ воду (отчетъ 1866 г., стр. 148), показываютъ, что это сомнѣніе до сихъ поръ еще не выяснено.

Не рѣшаясь высказать мнѣніе, что вышеупомянутыя кривыя, дѣйствительно, соотвѣтствуютъ наименьшему сопротивленію на корабль, мы все-таки замѣтимъ, что, кажется, онѣ принадлежатъ къ числу тѣхъ, вдоль которыхъ жидкость движется довольно спокойно, не производя безчисленныхъ водоворотовъ и расходящихся струй. Общая формула для опредѣленія длины корабля, предписываемой этой теоріей, есть слѣдующая.

Носовая часть въ футахъ $=\frac{2\pi}{g}V^2$ въ футахъ въ секунду.

Кормовая » » » $=\frac{4\pi}{3g}V^2$ въ футахъ въ секунду.

Вотъ значенія фактора и его логариѳмъ, дающія длину носовой части въ футахъ, когда скорость дана:

въ футахъ въ секунду. . . .	0,19518	log.=9,29045
„ узлахъ въ часъ.	0,5561	log.=9,74515
„ англ. (statute) миляхъ въ часъ.	0,41985	log.=9,62310

Профессоръ Ранкинъ, какъ результатъ своихъ собственныхъ наблюденій,—высказываетъ мнѣніе, что можно укоротить носовую часть до двухъ третей длины, опредѣляемой этой формулой, безъ значительнаго увеличенія сопротивленія, но что за то укорачиваніе кормовой части было-бы крайне невыгодно.

Въ сборникѣ «Proceedings of the Institution of Civil Engineers», vol. XXIII (for. 1864) p. 231, есть записка г-на Финпса: «Resistance of Bodies, passing throgh the Water.» Онъ говоритъ, что полное сопротивленіе можно подраздѣлить на слѣдующія составныя части:

Переднее сопротивленіе, — измѣняющееся прямо пропорціонально площади миделеваго сѣченія и обратно пропорціонально квадрату проэкціи носовой части.

Кормовое сопротивленіе,—подобная-же функція отъ кормовой части.

Сопротивленіе тренія,—измѣняющееся вмѣстѣ съ величиной погруженной поверхности.

Придаточное переднее сопротивленіе, которое выражается нѣкоторой эмпирической поправкой, представляющей функцію отъ возмущенія воды.

Сумма этихъ сопротивленій должна быть умножена на квадратъ скорости.

Къ запискѣ приложены извлеченія изъ компетентныхъ англійскихъ сочиненій по сопротивленію, такъ что она представляетъ прекрасный выводъ изъ наиболѣе вѣскихъ мнѣній, высказанныхъ въ нашей странѣ по этому вопросу.

Г-нъ Фиппсъ полагаетъ, что коэффиціентъ тренія воды о наружную поверхность корабля менѣе, чѣмъ такой же коэффиціентъ для внутренней поверхности трубки; и это до нѣкоторой степени согласно съ опытами Дарси надъ треніемъ воды въ трубкахъ, которые приводятъ къ заключенію, что коэффиціентъ тренія состоитъ изъ двухъ элементовъ: одинъ изъ нихъ постоянный, а другой мѣняется обратно-пропорціонально діаметру трубки.

Г-нъ Джонъ І. Торникрофтъ въ запискѣ, читанной передъ институтомъ морскихъ архитекторовъ въ этомъ году, которая, кажется, появится въ слѣдующемъ томѣ «Transactions», — даетъ такую формулу, составленную на основаніи опытовъ надъ теченіемъ воды въ трубкахъ:

$$\text{I.H.P}=\text{Vh}\left\{ \text{S}f\frac{3n}{2n+l}\,\text{V}^{1,7}+\varphi\text{SC}\,\frac{n^{\frac{1}{3}}+3}{l^{\frac{1}{3}}+3}\,\text{V}^{3/7}\right\},$$

гдѣ S есть смачиваемая поверхность, V — скорость хода въ узлахъ, l—длина, h, f, n, C суть постоянныя, опредѣляемыя эмпирически такимъ образомъ:

$$\begin{aligned}\log.\ \text{h} &= \bar{3},65450\\ \log.\ f &= \bar{2},10170\\ \log.\ \text{C} &= \bar{2},20041\\ \text{n} &= 380\end{aligned}$$

$$\varphi\text{S} = \int(\text{Sin}\Theta)^{2,5}ds$$

ds представляетъ элементарную площадку поверхности S, а Θ—уголъ, составляемый ею съ линіей движенія. Какъ видимъ, формула заключаетъ большое количество постоянныхъ величинъ, опредѣляемыхъ болѣе или менѣе произвольно.

Профессоръ Ранкинъ въ своей запискѣ въ „Transactions of the Institution of Naval Architects“ за 1864 г. (главная мысль которой изложена и въ сочиненіи: «Stipbuilding Theoretical and Practical») говоритъ, что процессы съ частицами воды, имѣющіе косвенное вліяніе на сопротивленіе при движеніи корабля, можно исчислить такимъ образомъ:

1) Возмущеніе частицъ воды.
2) Дѣйствіе теченій.
3) Дѣйствіе волнъ.
4) Дѣйствіе водоворотовъ, рождаемыхъ треніемъ.

Вліяніемъ первой причины, по его мнѣнію, можно пренебречь при движеніи корабля, хотя для модели оно довольно чувствительно. Относительно второй причины, профессоръ Ранкинъ говоритъ, что «она никогда не имѣетъ вліянія, если обводы корабля достаточно согласны; потому что по такимъ обводамъ частицы воды обтекаютъ безпрепятственно, не производя сзади корабля никакого движенія, кромѣ того незначительнаго, которое является неизбѣжнымъ слѣдствіемъ прилипанія и взаимной вязкости этихъ частицъ. Вотъ откуда и происходятъ недостатки прежнихъ теоретическихъ выводовъ о сопротивленіи воды на корабль, основанныхъ на опытахъ надъ движеніемъ въ водѣ тѣлъ клинообразныхъ, прямоугольныхъ или тѣлъ неправильной формы».

Г-нъ Ранкинъ подробно говоритъ о волнахъ, сопровождающихъ движеніе корабля, идущаго со скоростью большею, чѣмъ та средняя скорость, для которой онъ предназначенъ; онъ показалъ, что волны уклоняются отъ курса корабля на уголъ, прямо пропорціональный разности скоростей движенія ихъ собственнаго и хода корабля: такимъ образомъ онѣ уносятъ съ собою часть работы, которая безполезно пропадаетъ для послѣдняго. Приведемъ далѣе собственныя его слова:

«Для каждаго корабля, значитъ, существуетъ такой предѣлъ скорости, до котораго сопротивленіе отъ волны нечувствительно; но сейчасъ-же по переходѣ за этотъ предѣлъ оно начинаетъ дѣйствовать и съ увеличеніемъ скорости возрастаетъ чрезвычайно быстро .. Благодаря открытіямъ Скоттъ-Росселя, мы можемъ кораблю, предназначенному для хода съ данной скоростью, дать такіе обводы, при которыхъ онъ не будетъ испытывать сопротивленія отъ волны.» Эти замѣчанія относятся, конечно, къ волнамъ, образующимся отъ самаго движенія корабля; вопросъ долженъ представиться совсѣмъ въ другомъ видѣ, если будемъ разсматривать вліяніе морскаго волненія, происходящаго отъ вѣтра.

«Такимъ образомъ, остается разсмотрѣть только вліяніе водоворотовъ, рождаемыхъ треніемъ. Это сопротивленіе представляетъ сочетаніе прямыхъ и косвенныхъ дѣйствій прилипанія частицъ воды къ поверхности корабля, которую онѣ обтекаютъ; прилипаніе вмѣстѣ съ взаимной вязкостью частицъ и производитъ безчисленное множество мелкихъ водоворотовъ въ слоѣ воды, непосредственно прилегающемъ къ бортамъ судна».

Вмѣсто того, чтобы принимать, что сопротивленіе поверхностнаго тренія прямо пропорціонально величинѣ дѣйствительной погруженной поверхности, г-нъ Ранкинъ вводитъ такъ называемую *увеличенную поверхность* (augmented surface), которая получится, если возьмемъ сумму произведеній изъ безконечно малыхъ элементовъ поверхности на кубы отношеній скорости частицъ воды, обтекающихъ соотвѣтствующіе элементы, къ скорости самого судна. Пусть s будетъ дѣйствительная поверхность, а q—упомянутое отношеніе скоростей; тогда *увеличенная поверхность*$=\int q^3 ds$; и если, далѣе, V есть скорость, g—

ускореніе силы тяжести, w—вѣсъ одной кубической мѣры воды, а f—коэффиціентъ тренія, то:

Сопротивленіе отъ водоворотовъ$=V^2 f \frac{w}{2g} \int q^3 ds.$

Возьмемъ кубическій футъ за единицу; для морской воды дробь $\frac{w}{2g}$ немного отличается отъ единицы, и формула принимаетъ такой видъ : $V^2 f \int q^3 ds.$

Конечно, невозможно точно вычислять членъ $\int q^3 ds$ для каждаго корабля, и поэтому необходимо подъискать какую нибудь вспомогательную формулу. Въ «Philosophical Transactions» за 1863 г. стр. 134—37, г-нъ Ранкинъ показалъ, что увеличенная поверхность для трохоидальнаго отрѣзка, при данномъ основаніи и данной высотѣ, можетъ быть найдена, если произведеніе этихъ послѣднихъ умножимъ на слѣдующій коэффиціентъ увеличенія:

$$1+4(\mathrm{Sin}\varphi)^2+(\mathrm{Sin}\varphi)^4,$$

гдѣ φ есть уголъ, составляемый касательною съ основаніемъ. Для корабля, при обводахъ котораго частицы воды, обтекающія ихъ, движутся по трохоидамъ, достаточно съ довольно точнымъ приближеніемъ интегрировать слѣдующую формулу:

$$\text{длина} \times {}^1/_2 \text{ широта} \times \left\{1+4(\mathrm{Sin}\varphi)^2+(\mathrm{Sin}\varphi)^4\right\},$$

считая за перемѣнныя уголъ φ и полушироту, которыя можно снять съ чертежа. Когда пути, проходимые частицами, не трохоиды, то φ можно считать угломъ наибольшаго уклона. При настоящемъ состояніи разсматриваемаго вопроса теорія предполагаетъ ватерлиніи плоскими кривыми; поэтому третью перемѣнную мы могли бы ввести только въ такомъ случаѣ, если-бы было принято въ разсчетъ вертикальное движеніе водяныхъ частицъ.

Сопротивленіе, опредѣляемое при введеніи увеличенной поверхности, соединяетъ въ одно количество, какъ прямое дѣйствіе прилипанія частицъ воды къ поверхности корабля, такъ и косвенное дѣйствіе ихъ черезъ увеличеніе давленія на носъ и уменьшеніе его на корму.

За коэффиціентъ тренія профессоръ Ранкинъ принимаетъ $f=0{,}0036$, для хорошо выкрашенныхъ желѣзныхъ поверхностей. Этотъ постоянный элементъ выведенъ профессоромъ Вейсбахомъ, изъ опытовъ надъ теченіемъ воды въ трубкахъ. Соотвѣтствующій коэффиціентъ, выведенный изъ опытовъ Дарси, равенъ 0,004.

Увеличенная поверхность въ квадратныхъ футахъ, умноженная на кубъ скорости въ узлахъ, и даетъ, такъ называемый, *Ранкиновъ коэффиціентъ перемѣщенія* [1]). У хорошихъ желѣзныхъ судовъ онъ

[1]) Подробности объ этомъ коэффиціентѣ можно найти въ: „Civil Engineer and Architects journal“ за октябрь 1860 г. и въ: «Report of the Commitee of the British Association of Steampship Performances» 1868.

бываетъ около 20,000; тогда-какъ на яхтѣ «Викторія и Альбертъ» онъ достигаетъ до 21,800. Значительное уменьшеніе его противъ 20,000 надо считать признакомъ какой нибудь ошибки или въ кораблѣ, или въ его машинѣ, или въ двигателѣ,—или уже въ ошибочномъ опредѣленіи скорости хода его.

Профессоръ Ранкинъ прибавляетъ: «что касается неудачныхъ и неуклюжихъ судовъ, то нѣтъ никакой теоріи, дающей возможность опредѣлить ихъ сопротивленія помощью вычисленій, подобныхъ предъидущимъ.»

Теперь опять возникаетъ вопросъ, что значатъ *хорошіе* обводы корабля? Согласно теоріи профессора Ранкина, это суть обводы, по которымъ частицы воды движутся спокойно, безъ возмущенія. Какъ частный случай, сюда, кажется, надо включить и волнообразные обводы г-на Скоттъ-Росселя. Но эти линіи далеко не единственныя, которыя удовлетворяютъ вышесказанному требованію. Другой методъ построенія подобныхъ кривыхъ данъ профессоромъ Ранкиномъ въ его запискахъ, напечатанныхъ въ «Philosophical Transactions» за 1863 г., стр. 369 и въ «Philosophical Magazine» за октябрь 1864 г. и январь 65 г. Элементарное объясненіе этого метода изложено въ «Engineer» 16 октября 1868 года и въ сочиненіи «Shipbuilding, Theoretical and practical.»

Вообще теоріи зашли еще очень не далеко; а когда приходится имѣть дѣло съ тремя измѣреніями, то кажется, что нельзя предпочесть какую нибудь строгую математическую форму, относительно дѣйствія на нее сопротивленія, длинному, красивому, съ согласными обводами кораблю, проектированному по чертежу или по модели на глазъ опытнымъ чертежникомъ, или модельщикомъ.

Возможная связь между сопротивленіемъ воды на суда и ихъ углубленіемъ показана г-мъ Ранкиномъ въ нѣкоторыхъ замѣткахъ, напечатанныхъ въ «Proceding of the Royal Society» за 1868 г., стр. 344, въ «Reports of the British Associations» за 1868 г., въ «Transactions of the Institution of Naval architects» за 1868 г. и въ «Engineer» 28 августа и 30 октября 1868 г. На основаніи теоріи, подтвержденной опытами, какъ его собственными, такъ и Джона Инглисса младшаго, онъ говоритъ, что каждый корабль сопровождается волнами, которыхъ скорости $=\sqrt{gk}$, гдѣ g есть сила тяжести, а k—*средняя величина углубленія*, найденная черезъ раздѣленіе водоизмѣщенія на площадь сѣченія по ватерлиніи. Пока скорость корабля не превышаетъ $\sqrt{gk}$, сопротивленіе отъ волны не играетъ никакой роли, но съ переходомъ скорости за этотъ предѣлъ, волны уклоняются отъ курса корабля подъ угломъ, котораго косинусъ есть дробь:

$$\frac{\sqrt{gk}}{\text{скорость}}$$

и такимъ образомъ уносятъ съ собой работу, какъ это было уже сказано выше.

Форма миделеваго сѣченія, кажется, не вліяетъ на сопротивленіе при

движеніи на тихой водѣ, если только не измѣняется величина смачиваемой поверхности, подвергающейся дѣйствію воды. Если смачиваемый поясъ и ширина ватерлиніи даны, то форма наибольшей площади есть сегментъ круга; но это не есть рѣшеніе той задачи, которая обыкновенно представляется; именно: при данной ширинѣ и углубленіи корабля найти форму миделя, при которой-бы отношеніе его площади къ смачиваемой поверхности было наибольшее. Не трудно видѣть, что въ частномъ случаѣ, когда углубленіе равно полуширотѣ, упомянутое отношеніе будетъ одинаково, какъ при прямоугольномъ, такъ и при круговомъ сѣченіи миделя, и поэтому рѣшеніе задачи надо искать между этими крайними случаями. Общаго рѣшенія до сихъ поръ еще нѣтъ, но при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ оно дано г-мъ Джемсъ Робертъ-Непиръ и читано въ засѣданіи философскаго глазговскаго общества; напечатано въ «Mechanics Magazine» за 24 апр. 1863 г. vol. IX, p. 311 и въ «Engineer» за 1-е мая 1863 г., vol. XV, p. 245.

Наилучшее соотношеніе для хорошаго хода корабля между длиной, шириной и углубленіемъ его до сихъ поръ еще на найдено; даже если предположимъ, что длина не превосходитъ предѣла Скоттъ-Росселя.

Можетъ быть, практически это и невозможно, такъ какъ экономическіе разсчеты, а также соображенія о внутреннемъ размѣщеніи и вмѣстимости корабля, всегда связанныя съ его размѣреніями, имѣютъ мало соотношенія съ теоретическимъ максимумомъ его дѣйствительнаго движенія. Но измѣненіе ширины и глубины корабля, въ связи съ вліяніемъ на движеніе его, при постоянствѣ всѣхъ другихъ обстоятельствъ, едва-ли можно считать вопросомъ удоборазрѣшимымъ при нашихъ теперешнихъ свѣдѣніяхъ.

Сопротивленіемъ воздуха на корпусъ корабля никоимъ образомъ нельзя пренебрегать ни на практикѣ, ни при опытахъ; но здѣсь мы не будемъ разсматривать этого вопроса.

Все вышесказанное представляетъ почти всѣ главныя, до сихъ поръ извѣстныя свѣдѣнія о полномъ сопротивленіи на корабль при движеніи его на глубокой и тихой водѣ. Мы не считаемъ необходимымъ разбирать здѣсь вопросъ о сопротивленіи на мелководьѣ, въ узкихъ каналахъ и при бурномъ состояніи моря.

Сгруппировавъ вышеприведенные выводы въ одинъ общій результатъ, мы можемъ заключить, что пока еще нѣтъ общепринятой теоріи или правилъ для вычисленія сопротивленія воды на корабль. Правилъ, правда, предложено много, но всѣ они такъ разнообразятся и по виду и по результатамъ, что степень довѣрія, питаемая къ каждому изъ нихъ, зависитъ отъ репутаціи автора.

Перейдемъ теперь къ сопротивленію, разсматриваемому въ деталяхъ.

Нельзя сказать, чтобы мы были знакомы со всѣми мелкими явленіями, происходящими подъ поверхностью воды, при движеніи въ ней плавающаго тѣла. Но все таки намъ извѣстны слѣдующіе факты:

Каждое судно, движущееся въ водѣ при посредствѣ двигателя, не дѣйствующаго на нее, должно произвести возмущеніе въ окружающихъ частицахъ жидкости, приводя главную ихъ массу въ движеніе по на-

правленію своего собственнаго; этого движенія достаточно, чтобы поглощать работу, затрачиваемую движущей силой, потому что сама она и представляетъ работу противодѣйствующаго сопротивленія. Оно сильно маскируется колебательными (волновыми) родами движенія. Послѣднее при образованіи своемъ, поглощаетъ часть работы, но, разъ установившись, оно уже не зависитъ отъ родившей его силы; это все равно, какъ висячій маятникъ, который требуетъ, чтобы ему дали толчокъ для приведенія его въ движеніе, но дальнѣйшій ходъ его не зависитъ отъ начальной силы. Слѣдовательно, для образованія волны нужна работа двигателя; но затѣмъ волна будетъ видоизмѣняться или даже исчезнетъ независимо отъ траты работы двигателя, исключая, конечно, случаевъ, въ которыхъ волна приходитъ въ непосредственное прикосновеніе съ движущими органами.

Если корабль съ хорошими обводами движется въ водѣ, то прежде всего онъ встрѣчаетъ переднее сопротивленіе; отъ него образуется передъ носомъ валъ, который разсыпется во всѣ стороны, если только будетъ имѣть время на это; разсыпется тѣмъ скорѣе, чѣмъ острѣе обводы носовой части, и тѣмъ свободнѣе, чѣмъ меньше скорость движенія. Это обстоятельство уже устанавливаетъ извѣстный предѣлъ скорости, переходъ за который не выгоденъ, въ зависимости отъ длины и формы носовой части; или только отъ длины, если задаемъ непремѣнно извѣстныя формы. Если корабль движется съ такою скоростью, что носовой валъ не успѣваетъ разсыпаться, то онъ долженъ толкать передъ собой этотъ валъ, на что тратится нѣкоторая часть его полезной работы.

Вслѣдствіе тренія о поверхность корабля также уносятся струи воды по направленію его движенія. На самомъ дѣлѣ, почти вся работа тренія тратится на образованіе этихъ струй, которыя и образуютъ теченіе воды въ кильватерѣ [1]) корабля.

Необходимость наполнить пустое пространство, которое иначе оставалось бы такъ, также производитъ упомянутое теченіе, сопровождаемое волнами.

Если судно движется со скоростью, несообразной его формамъ и размѣрамъ, то образуются многочисленныя волны, спеціальное описаніе которыхъ можно найти въ запискахъ профессора Ранкина.

Движеніе судовъ неправильныхъ или несогласныхъ формъ сопровождается сильными водоворотами, а также и случайными волнами. Сообразивъ, что на образованіе ихъ потребна извѣстная работа, становится яснымъ, что наименьшее сопротивленіе соотвѣтствуетъ наименьшему возмущенію. Въ дѣйствительности объ этихъ водоворотахъ извѣстно очень мало. Мы знаемъ поверхностное ихъ дѣйствіе, которое легко наблюдать въ грязной водѣ, особенно при образованіи пѣны; но распространеніе ихъ въ глубину и зависимость ихъ отъ послѣдней рѣшительно неизвѣстны намъ; и другія мелкія явленія мы понимаемъ до сихъ поръ не такъ хорошо, чтобы по аналогіи съ ними объяснить вы-

[1]) Какъ разъ сзади.

шеописанныя. Неизвѣстно также, въ какомъ направленіи происходитъ замѣщеніе пустоты за кормой. Вода можетъ набѣгать сзади, или съ котораго нибудь боку, или же нахлынуть изъ подъ низу, какъ волна. Вѣроятнѣе всего, что всѣ три рода замѣщенія имѣютъ мѣсто, но въ какомъ именно отношеніи, этого до сихъ поръ не могутъ опредѣлить ни теорія, ни опытъ.

Теоретическ̀и неважно, изслѣдуемъ-ли мы явленія, считая, что корабль движется, а вода стоитъ въ покоѣ,—или-же, обратно, принимаемъ корабль неподвижнымъ, а воду текущей къ нему на встрѣчу. Практическ̀и-же эти условія не совсѣмъ тождественны, такъ какъ тутъ надо принять въ разсчетъ вертикальное скольженіе жидкости по поверхности тѣла, въ которомъ сила тяжести является одной изъ дѣйствующихъ силъ. Кромѣ всего сказаннаго, явленія въ узкихъ и мелководныхъ каналахъ еще болѣе усложняютъ вопросъ, вводя массу неизвѣстныхъ случайностей.

Переходя къ вопросу о вліяніи двигателя, считаемъ необходимымъ замѣтить, что въ настоящемъ отчетѣ мы не имѣемъ намѣренія спеціально говорить о двигателяхъ, а упомянемъ только о выборѣ ихъ при производствѣ опытовъ.

Всѣ двигатели, исключая парусовъ, буксировъ и паромныхъ двигателей, совершаютъ свою работу реакціей, производящей теченіе воды въ сторону, противную движенію корабля, или останавливающей уже существующее въ этомъ направленіи теченіе или, наконецъ, измѣняющей его направленіе на противное. Таково дѣйствіе веселъ, лопастей колесъ, винтовъ. Но если дѣйствіе это сходно въ главныхъ чертахъ, то оно чрезвычайно разнообразится въ деталяхъ, при встрѣчѣ съ волнами и теченіями; различно также и противодѣйствіе этихъ послѣднихъ на различные двигатели.

Такимъ образомъ, весла гребной шлюбки образуютъ по обоимъ бортамъ струи воды съ поступательной почти одинаковой скоростью къ кормѣ, и въ почти одинаковомъ разстояніи отъ шлюбки; поэтому волны и водовороты, являющіеся собственно только отъ движенія ея, претерпѣваютъ мало измѣненій въ своемъ видѣ и дѣйствіи. При винтовомъ двигателѣ, напротивъ, бо̀льшая часть кильватернаго теченія останавливается или отклоняется дѣйствіемъ винта, который, независимо отъ движенія корабля, возмущаетъ воду и въ свою очередь подвергается противудѣйствію волнъ замѣщенія. Интерференція эта въ суммѣ такъ велика, что нерѣдко маскируетъ самое *скольженіе* (slip), реакціей котораго и достигается движеніе; она производитъ явленіе *видимаго отрицательнаго скольженія* (apparent negative slip). Вмѣсто теоретическаго объясненія того, что происходитъ при этихъ обстоятельствахъ, сошлемся прямо на слѣдующія сочиненія:

Rankine, «On the Mechanical Principles of the Action of Propellers.»

Froude, «Note on the above paper» vol. VI, for 1865, p. 13 et seq.

Reed, «On cases of apparent negative slip», vol. VII, for 1866, p. 114 et seq.

Rankine, «On apparent negative slip.»

Froude, On the same.

Rigg, «On the Relations of the Screw to ist Reverse Currents», vol. VIII, for 1867, p. 68 et seq.

Rigg, «On the Reverse Currents and Slip of Serew propellers,» vol IX, for 1868, p. 184.

Смотри также Bourne, «On the screw propeller», второе изданіе, chap. III и Rankine, «Shipbuilding: Theoretical and Practical», pp. 88, 89, 247 and 259.

Мы не сомнѣваемся, что теоретическія изслѣдованія по этому предмету подвинули впередъ тѣ свѣдѣнія, которыя мы имѣли до послѣднихъ опытовъ.

ПРЕЖНІЕ ОПЫТЫ НАДЪ СОПРОТИВЛЕНІЕМЪ.

Первые важные опыты надъ сопротивленіемъ были произведены Боссю, Кондорсе и Д'Аламберомъ по иниціативѣ Тюрго. Результаты были напечатаны въ отдѣльномъ сочиненіи въ 1777 г., и очень полное извлеченіе изъ нихъ далъ Боссю въ своей «Hydrodinamique». Главные результаты, перечисленные имъ, суть слѣдующіе:

Сопротивленіе на то же самое тѣло, какой бы оно ни было формы, при различныхъ скоростяхъ, мѣняется почти пропорціонально квадратамъ послѣднихъ.

Прямое переднее сопротивленіе на плоскую поверхность, при тѣхъ же скоростяхъ, почти пропорціонально величинѣ ея.

Мѣра прямого сопротивленія на плоскую поверхность равна вѣсу столба жидкости, котораго основаніе равно самой поверхности, а высота равна той, которая отвѣчаетъ скорости движенія.

Сопротивленіе, въ случаѣ косвеннаго движенія, при всѣхъ остальныхъ одинаковыхъ обстоятельствахъ, не уменьшается по закону, сколько нибудь близкому къ закону квадратовъ синусовъ угловъ паденія, какъ это думали прежде, такъ что по крайней мѣрѣ для острыхъ очертаній этотъ законъ необходимо долженъ быть оставленъ.

Г-нъ Скоттъ-Россель замѣтилъ, что наблюденныя сопротивленія воды на корабль, въ случаѣ клинообразной носовой его части, между нѣкоторыми предѣлами, могутъ быть представлены формулой такого вида:

$$R=K\left(\frac{\pi}{2\pi-\varepsilon}\right)^2,$$

гдѣ K—постоянная, $\pi=180°$, ε есть уголъ уклона носовыхъ граней, не меньшій 12° и не большій 144°. См. его «Naval Architecture», p. 168 и «Transactions of Civil Engineers,» vol. XXIII, p. 346.

Слѣдующіе важные опыты принадлежатъ Чапману; они напечатаны въ «Architectura Navalis Mercatoria». О результатѣ ихъ мы уже упоминали выше. Въ 1795 г. онъ произвелъ въ Карльскронѣ нѣсколько новыхъ опытовъ, которые, кажется, привели къ нѣсколько другимъ заключеніямъ. Смотри «Juman's translation of the Chapman», pp. 41 и 257.

Перейдемъ теперь къ опытамъ Бофуа, произведеннымъ въ Гренландскомъ докѣ въ 1794 — 98 гг. Эта громадная серія опытовъ открыла только немного новыхъ фактовъ, изъ которыхъ мы упомянемъ о слѣдующихъ:

Сопротивленіе на несклонныя поверхности не мѣняется пропорціонально квадратамъ синусовъ угловъ паденія.

Для прямогранныхъ формъ, надъ каковыми и производились опыты, сопротивленіе возростаетъ быстрѣе, чѣмъ квадратъ скорости.

Увеличеніе длины между нѣкоторыми предѣлами имѣетъ вліяніе на уменьшеніе сопротивленія.

Треніе смачиваемой поверхности составляетъ очень важный элементъ сопротивленія.

Сопротивленіе отъ тренія возрастаетъ въ отношеніи, кажется, нѣсколько меньшемъ, чѣмъ квадратъ скорости, между—$V^{1,7}$ и $V^{1,8}$.

Онъ также пришелъ къ заключенію, что тѣла, погруженныя въ воду до глубины 6 футъ, испытываютъ меньшее сопротивленіе, чѣмъ плавающія при поверхности воды; но въ случаѣ желѣзной доски, буксируемой плашмя, онъ нашелъ, что сопротивленіе увеличивается съ погруженіемъ.

Выводы изъ этихъ опытовъ теряютъ много своей цѣны, вслѣдствіе того, что производились надъ малыми моделями и надъ тѣлами, неимѣющими ничего общаго съ формами корабля.

«Philosophical Transactions» за 1828 г. содержатъ описаніе опытовъ, произведенныхъ г-мъ Джемсомъ Уолкеромъ въ остъ-индскомъ внутреннемъ докѣ. Крутоносая шлюбка буксировалась черезъ докъ веревкой, навернутой на воротъ, который приводился въ движеніе рабочими; веревка прикрѣплялась къ пружинѣ динамометра; а онъ къ шлюбкѣ. Испытуемыя шлюбки всѣ имѣли крутые обводы, и найдено, что сопротивленіе только съ грубымъ приближеніемъ мѣняется, какъ квадраты скорости; при большихъ-же скоростяхъ оно возрастаетъ гораздо быстрѣе.

Жаль только, что чертежи шлюбокъ не сдѣланы съ такими подробностями, какъ-бы это было желательно; нѣтъ также точнаго описанія состоянія ихъ поверхности. Но опыты производились весьма тщательно и правильно, и величина шлюбокъ значительно превосходила величину моделей всѣхъ предшествующихъ опытовъ.

Есть еще нѣсколько опытовъ г-на Кольтгюрста, опредѣлявшаго зависимость сопротивленія отъ формъ плавающаго тѣла, а также треніе въ связи съ величиною и качествами смачиваемой поверхности. Ихъ можно прочесть въ сборникѣ „Civil Engineers Transactions“.

Укажемъ также на отчетъ комитета, производившаго, по порученію Британскаго общества, сравненіе между сопротивленіемъ на тѣла съ надводной частью и тѣла, совсѣмъ погруженныя въ воду. (B. A. Reports за 1868 годъ; p. 148). Комитетъ рѣшился напечатать одни только наблюденные факты, безъ всякихъ выводовъ и объясненій, потому что, какъ мы уже знаемъ,—очень трудно придти къ какой нибудь удовлетворительной теоріи.

Скажемъ теперь объ опытахъ капитана Бургуа, которые начались въ Индретѣ въ 1844. Сперва у него было нѣсколько шлюбокъ отъ 22 до 25 футъ длиною, буксируемыхъ пароходомъ „Пеликанъ", которымъ онъ тогда командовалъ; потомъ онъ пользовался маленькой купеческой шкуной въ 50 футъ длиною; затѣмъ бригомъ «Фобергъ» въ 98 футовъ длиною. Эти суда просто буксировались, а сопротивленіе измѣрялось напряженіемъ динамометра. Позднѣе произведены подобные же опыты и во Франціи, съ винтовымъ пароходомъ «Сфинксъ», 109 ф. длиною (разумѣется, винтъ былъ поднятъ), съ винтовымъ почтовымъ шлюпомъ — «Марсо» 131 ф. длиною и съ 74-хъ пушечнымъ кораблемъ «Дюперре», построеннымъ Сане. Вѣроятно, трудно ожидать что нибудь лучше такихъ опытовъ, и именно изъ нихъ-то Бургуа и опредѣлилъ коэффиціенты своихъ формулъ. Къ несчастью, онъ не напечаталъ никакихъ подробныхъ свѣдѣній или чертежей, исключая длины и ширины ватерлиніи, углубленія и площади погруженной части миделеваго сѣченія, но ни величины ихъ смачиваемой поверхности, ни даже водоизмѣщенія мы не знаемъ.

Въ мемуарахъ г-на Бургуа нѣтъ никакихъ данныхъ; онъ упоминаетъ о нихъ уже позднѣе, въ 1853 году. Онъ говоритъ также о нѣкоторыхъ опытахъ для опредѣленія силы машины, но разборъ этого предмета не входитъ въ программу нашего отчета.

Въ началѣ изслѣдованія сопротивленія воды на корабль полагали, что результаты, полученные изъ опытовъ надъ моделями, относятся прямо и къ самимъ судамъ при соотвѣтствующихъ скоростяхъ ихъ движенія. Опыты въ остъ-индскомъ внутреннемъ докѣ въ 1827—28 г. показали несостоятельность результатовъ, найденныхъ при испытаніи малыхъ моделей; а нѣсколько позднѣе—Ричъ, директоръ школы d'Application du Génie Maritime en France, указалъ, что сравненіе между собою моделей различной величины можетъ быть сдѣлано при скоростяхъ, прямо пропорціональныхъ квадратамъ ихъ соотвѣтственныхъ измѣреній. Въ такомъ случаѣ дѣйствительныя сопротивленія различались-бы, какъ кубы линейныхъ размѣреній. Это слѣдуетъ изъ теоріи сопротивленія на тѣла, погруженныя въ воду, при томъ предположеніи, что сопротивленіе мѣняется, какъ квадратъ скорости. Если примемъ теорію Скоттъ-Росселя о длинѣ корабля (т. е. что наибольшая его скорость не должна превосходить скорость волны, связанную нѣкоторымъ опредѣленнымъ отношеніемъ съ длиной корабля), то придемъ къ тому-же заключенію, т. е. что длина волны мѣняется, какъ квадратъ скорости.

Предлагаемые опыты. Вотъ какіе опыты для опредѣленія сопротивленія воды на корабль, по нашему мнѣнію, важно сдѣлать.

Тщательно выбрать судно значительной величины и съ хорошими обводами; напр. хорошій винтовой пароходъ съ подъемнымъ винтомъ, съ такими бортами, которые не представляли-бы особенно большаго сопротивленія воздуху, и, наконецъ, съ малымъ мачтовымъ вооруженіемъ, или совсѣмъ безъ него.

Затѣмъ ввести его въ докъ и тамъ тщательно измѣрить его обводы, (или, выражаясь техническимъ языкомъ, снять его линіи), послѣ чего

положить марки, по которымъ-бы потомъ можно было узнать, измѣнилъ или нѣтъ онъ свои формы.

Нужно, чтобы онъ могъ буксироваться съ различными скоростями, отъ самыхъ малыхъ до такихъ большихъ, какія только можно ему сообщить; и чтобы при этомъ сопротивленіе, измѣряемое динамометромъ, записывалось самопишущимъ приборомъ.

Мѣсто для опытовъ должно быть выбрано на глубокой водѣ, свободной отъ донныхъ волнъ, и при томъ такъ, чтобы скорость хода корабля могла быть наблюдаема и съ берега. Вода также должна быть такъ чиста, чтобы прозрачность ея простиралась на значительную глубину. Если нельзя выбрать мѣста, не подверженнаго приливамъ и отливамъ, то надо, чтобы по крайней мѣрѣ тамъ не было интерференціи волнъ и неправильныхъ теченій. Мѣста, удовлетворяющія такимъ условіямъ, можно найти на берегахъ Норвегіи и на западномъ берегу Шотландіи.

Во время опытовъ надо внимательно наблюдать направленіе и скорость мѣстныхъ теченій, производимыхъ движеніемъ судна.

Надо принять возможныя предосторожности, чтобы отвратить интерференцію воды, возмущенной движеніемъ буксируемаго судна, съ водой, возмущенной движеніемъ буксирующаго или буксирующихъ судовъ.

Для этого лучше всего имѣть два буксирные бота съ перлинями, встрѣчающимися между собою подъ угломъ въ видѣ буквы V, потому что тогда буксируемое судно не попадаетъ въ кильватерную струю переднихъ судовъ, чего, конечно, и надо необходимо добиваться.

Желательно, чтобы эти опыты производились по крайней мѣрѣ съ двумя судами, значительно разнящимися между собою по абсолютнымъ и относительнымъ размѣрамъ, а также и по степени гладкости смачиваемой поверхности.

Необходимо произвести еще опыты для опредѣленія степени замедленія судна, что можно сдѣлать, сообщивъ ему нѣкоторую скорость и потомъ, внезапно остановивъ дѣйствіе движущей силы, позволить ему постепенно останавливаться, пока оно совсѣмъ не потеряетъ инерціи подъ вліяніемъ сопротивленія воды.

Не мѣшаетъ еще тѣже самыя суда (и по возможности при тѣхъ же условіяхъ углубленія) испытать при дѣйствіи ихъ собственныхъ двигателей, силу которыхъ наблюдать по динамометру, введенному между ними и машиною; и въ этомъ случаѣ тоже наблюдать явленіе возмущенія воды, опредѣляя скорость и направленіе мѣстныхъ волнъ и теченій.

Опыты, предлагаемые нами, мы считаемъ необходимыми не только для теоріи сопротивленія, но и въ практическомъ отношеніи, для точнаго знакомства съ дѣйствіемъ руля и двигателя корабля; безъ этого знакомства невозможенъ точный разсчетъ при постройкѣ и проэктированіи судовъ.

Средствами для подобныхъ опытовъ, очевидно, можетъ располагать только морское правительство, и то въ мирное время, когда оно можетъ произвольно пользоваться судами со всѣмъ ихъ экипажемъ и составомъ

офицеровъ. Конечно, на это понадобятся экстренныя издержки; но что значатъ онѣ въ сравненіи съ важными результатами, которыхъ иначе никакъ нельзя и достигнуть,—результатами, могущими и удешевить стоимость корабля, и усовершенствовать его мореходныя качества?

Приложеніе 6-е.

ПЕРВАЯ СТАТЬЯ ФРОУДА О ТРЕНІИ.

Взята изъ Report of the British Association for the Avancement of Science. Brighton 1872, p. 118. (Перевелъ С. А. Пржибитекъ).

Опыты надъ поверхностнымъ треніемъ, опредѣленнымъ посредствомъ доски, движущейся въ водѣ, Фроуда (W. Froude).

(Сообщеніе, которое главный комитетъ постановилъ напечатать въ извлеченіи).

Предметъ этихъ опытовъ—опредѣленіе условій сопротивленія, происходящаго отъ тренія воды о бока моделей или судовъ во время ихъ движенія въ водѣ. Опредѣленіе это было достигнуто, ведя на буксирѣ, посредствомъ динамометрическаго аппарата, доски, состоящія изъ тонкихъ планокъ. Доски были избраны потому, что онѣ по своей формѣ обладаютъ наименьшею способностью смѣщаться и представляютъ по направленію перпендикулярному линіи движенія возможно меньшую площадь сѣченія. Въ тоже время, такъ какъ доски способны плавать, ихъ можно было сдѣлать стойкими и удерживающимися сами собою въ водѣ, даже при совершенномъ погруженіи.

Динамометрическое приспособленіе было слѣдующее [1]): бассейнъ съ водою съ параллельными сторонами, длиною 278 футовъ, шириною 36 ф. у основанія и 10 ф. глубины; но для опытовъ надъ поверхностнымъ треніемъ необходимо было понизить уровень воды на 15 дюймовъ. Бассейнъ покрытъ крышей отъ одного конца до другаго, на рамахъ крыши во всю ея длину проходятъ легкіе желѣзные рельсы, находящіеся на высотѣ 20 дюймовъ надъ нормальнымъ уровнемъ воды. Между рельсами находится свободное. пространство безъ поперечинъ или шпалъ. По рельсамъ движется прочная рамка (*AA*), подвѣшенная къ осямъ двухъ паръ колесъ, и приводится въ движеніе безконечнымъ проволочнымъ канатомъ, намотаннымъ въ нарѣзки спиральной формы правильно вращающагося цилиндра. Послѣдній приводится въ движеніе небольшой паровой машиной, имѣющей тяжелое, очень быстро вращающееся маховое колесо и хронометрическій уравнитель очень точнаго дѣйствія. Посредствомъ этихъ приспособленій всякая требуемая ско-

[1]) Листъ 8-й, чертежъ 103-й.

стоянная скорость отъ 100 до 1000 футовъ въ минуту можетъ быть сообщена рамкѣ. На рамкѣ помѣщенъ динамометрическій аппаратъ. Чертежъ 103, помѣщенный на листѣ 8-мъ, позволяетъ видѣть это во всѣхъ подробностяхъ, съ тѣми спеціальными приспособленіями, которыя примѣнялись въ опытахъ опредѣленія поверхностнаго тренія. Устройство аппарата можетъ быть лучше понято изъ разсмотрѣнія подробнаго рисунка, нежели изъ словеснаго описанія. Въ общихъ чертахъ, однако, онъ слѣдующій.

Доска (*BB*), сопротивленіе которой нужно опредѣлить, движется въ водѣ посредствомъ тяги и принаровлена такъ, что горизонтальная часть силы сопротивленія, дѣйствующаго на доску (съ возможнымъ отсутствіемъ тренія), вполнѣ передается спиральной пружинѣ (*H*), похожей на употребляющуюся въ пружинныхъ вѣсахъ. Пружина однимъ концомъ неподвижно удерживается крѣпкимъ брускомъ (*OO*), спускающимся съ краевъ рамки. Растяженія этой пружины, подъ вліяніемъ различныхъ прилагаемыхъ къ ней силъ, составляютъ въ каждомъ данномъ случаѣ мѣру данной силы. Растяженія пружины переносятся на масштабъ посредствомъ удлиненной ручки, заканчивающейся перомъ (*S*). Перо слѣдуетъ за движеніями ручки и чертитъ линію на полосѣ бумаги, находящейся на цилиндрѣ (*UU*). Цилиндръ этотъ приводится въ движеніе посредствомъ цѣпи (*g*), идущей отъ блока, насаженнаго на колесѣ задней оси. Такимъ образомъ круговое движеніе бумаги представляетъ въ маломъ видѣ поступательное движеніе рамки. Второе перо (*V*), дѣйствующее посредствомъ часоваго механизма, отмѣчаетъ на цилиндрѣ время по мѣрѣ того, какъ цилиндръ поворачивается вокругъ своей оси. Такимъ образомъ, въ каждомъ опытѣ на бумагѣ были намѣчены двѣ черты: одна, показывающая сопротивленіе, испытываемое доскою въ каждый моментъ движенія, другая—показывающая скорость, съ какой каждая часть пути была пройдена.

Доски были толщиною около $^3/_{16}$ дюйма, различной длины и (послѣ отдѣлки) одинаковой ширины въ 19 дюймовъ. Доски для опытовъ были помѣщаемы въ водѣ ребромъ и верхній край ихъ погружался приблизительно на $1^1/_2$ дюйма. Нижній край досокъ былъ сдѣланъ на подобіе киля, состоялъ изъ свинца той же толщины, какъ и доска, и былъ достаточно тяжелъ, чтобы почти нейтрализовать всплываніе на водѣ того легкаго дерева, изъ котораго состояли доски. Несмотря на то, что доски сдѣланы были устойчивыми и приблизительно гарантированы отъ всплыванія, все же во время опытовъ необходимо наблюденіе надъ ними, чтобы ихъ сохранить въ точно вертикальномъ положеніи, а направленіе продольной оси досокъ—точно горизонтальномъ. Не менѣе необходимо, чтобы доски были совершенно свободны по направленію движенія, такъ чтобы все напряженіе буксировки было вполнѣ передано динамометру.

Для этой цѣли былъ привѣшенъ брусокъ (*CC*) изъ легкаго, но негнущагося дерева, по направленію длины динамометра, почти что у поверхности воды. Къ этому то бруску и прикрѣплялись прочно доски. Этотъ брусокъ поддерживался съ каждаго конца легкими подпорками

или подвижными рамками (*EE* и *EE*) и так. обр. двигался совершенно свободно параллельно своей продольной оси и былъ неподвиженъ въ поперечномъ направленіи. Далѣе, оказалось необходимымъ продлить вверхъ переднюю подпорку (*EE*) дальше точки ея привѣса и приложить къ этому удлиненію грузъ (*F*) такимъ образомъ, чтобы противувѣсить имъ тяжесть бруска и вмѣстѣ съ тѣмъ чтобъ не уменьшить свободы движенія, какую имѣетъ доска. Безъ этого приспособленія рамка могла бы быть въ равновѣсіи по направленію движенія только въ одномъ положеніи; во всякомъ другомъ положеніи она вліяла бы на динамометръ положительной или отрицательной силой.

Неподвижная связь между досками (*BB*) (которыя были подъ водою) и подвижнымъ брускомъ съ параллельнымъ движеніемъ (находящимся внѣ воды) составляла родъ влагалища или носа (катъ-ватера *DD*), въ который входилъ передній край доски. Носъ имѣлъ длинный верхній конецъ, выступающій изъ воды и прикрѣпленный вертикально къ подвижному бруску тремя крѣпкими гвоздями или болтами. Доска была заострена такимъ образомъ, чтобы къ ней пришлись края паза. которымъ сзади кончался носъ *DD* и чтобы поверхность соединенія была по возможности гладкой (чер. 104 А).

Изслѣдованіе поверхностнаго тренія можно раздѣлить на три первичные отдѣла, а именно: 1) на опредѣленія закона измѣненія сопротивленія отъ скорости; 2) различія въ сопротивленіи, зависящаго отъ различія въ качествѣ поверхности, и 3) на опредѣленія различія въ сопротивленіи на единицу поверхности, зависящаго отъ различія въ длинѣ поверхности.

Сначала не видна необходимость изученія послѣдняго изъ этихъ условій, такъ какъ обыкновенно придерживаются того мнѣнія, что поверхностное треніе измѣняется прямо пропорціонально площади поверхности и остается постояннымъ для данной площади, будетъ ли поверхность ея длинна и узка, или коротка и широка. Мнѣ всегда казалось невозможнымъ, чтобы это было дѣйствительно такъ, именно потому, что участокъ поверхности, идущій первымъ по направленію движенія, претерпѣвая сопротивленіе воды, долженъ въ свою очередь сообщить водѣ толчекъ къ движенію по тому же направленію, по которому движется самъ. Вслѣдствіе этого, участокъ поверхности, слѣдующій за первымъ, будетъ тереться не о неподвижную воду, но о воду, двигающуюся отчасти по направленію его движенія, и поэтому не будетъ испытывать отъ воды такого же сопротивленія, какъ первый участокъ [1]). Если это выдерживаетъ критику, то вѣрно и то, что

[1]) Въ 1-й главѣ, при разборѣ опытовъ Фроуда (стр. 65—68), я дѣлаю изъ его собственныхъ чиселъ выводъ, прямо этому противорѣчащій, и думаю, что поводомъ для его вывода—Фроуду служили главнымъ образомъ два обстоятельства, кажется, имъ упущенныя изъ вида. Во-первыхъ, онъ считаетъ сопротивленіе остраго носа такимъ же какъ и другихъ частей доски, т. е. зависящимъ лишь отъ тренія, а оно въ дѣйствительности больше, а потому у него и приходится на переднія доли досокъ или на короткія доски большее сопротивленіе сравнительно съ длинными досками. Во-вторыхъ, длинныя доски

удваиваніе длины поверхности, причемъ удваивается ея площадь, въ тоже время не увеличиваетъ вдвое ея сопротивленія, такъ какъ сопротивленіе второй половины поверхности неодинаково съ сопротивленіемъ первой.

Для того, чтобы привести полученные результаты въ форму, наиболѣе удобную для опредѣленія трехъ отдѣльныхъ условій сопротивленія, поименованныхъ выше, было постановлено представить результаты опытовъ графически, посредствомъ діаграммъ, двумя способами. Въ обоихъ способахъ ординаты представляютъ сопротивленіе, между тѣмъ какъ абсциссы представляютъ въ одномъ способѣ скорости, а въ другомъ—длины поверхности. На рис. 107 и 108 (листъ 9-й) приведены оба случая. Если принять доказаннымъ, что треніе пропорціонально квадрату скорости, то результатъ опытовъ, изображенный первымъ способомъ, долженъ выразиться параболой, исходящей изъ нолевой точки сопротивленія и скорости. Если треніе на единицу поверхности, какъ обыкновенно полагаютъ, одинаково по всему протяженію поверхности и, слѣдовательно, все сопротивленіе доски данной ширины измѣняется прямо пропорціонально ея длинѣ, то результаты опытовъ, выраженные по 2-му методу, должны бы представить прямыя линіи, исходящія изъ нолевой точки осей координатъ. Если эти линіи, будучи прямыми, исходятъ изъ точки надъ нулемъ, это будетъ указывать, что по всему протяженію, вмѣстѣ съ элементомъ, измѣняющимся съ длиной, находится постоянный элементъ сопротивленія (таковой можетъ быть главнымъ сопротивленіемъ). Если линіи вогнуты къ основанію (къ оси длины), это указываетъ, что треніе на единицу поверхности уменьшается съ увеличеніемъ длины поверхности.

Когда каждая принаровленная доска была испытана въ цѣломъ ряду опытовъ съ заранѣе опредѣленными скоростями, данныя этихъ опытовъ были сгруппированы первымъ вышепоименованнымъ способомъ. На рис. 105 и представлены эти результаты посредствомъ линій, указывающихъ дѣйствительное сопротивленіе данной доски при данной скорости ея движенія. Нѣкоторое различіе въ условіяхъ опыта обозначено особо, на поляхъ страницы. Крестики, намѣченные на линіяхъ, указываютъ дѣйствительныя точки, опредѣленныя отдѣльнымъ опытомъ. На основаніи этихъ точекъ и были построены кривыя. Нужно замѣтить, что за исключеніями, которыя впослѣдствіи будутъ отмѣчены (именно линіи, означенныя $B'B'$, $C'C'$), врядъ ли есть какое либо различіе между показанными (представленными) линіями относительно закона измѣненія сопротивленія по отношенію къ скорости, такъ какъ сопротивленіе повсюду приблизительно выражается степенью 1,8 скорости ($R = av^{1,8}$).

Фроуда (въ 50 футовъ) только въ пять разъ превосходили длину бассейна, а при этомъ трудно ждать при ихъ движеніи равномѣрной скорости. Оттого, вѣроятно, получены для нихъ немного меньшія сопротивленія, а въ суммѣ и вышло какъ бы подтвержденіе предположеній Фроуда. Рис. 108 (листъ 9) подтверждаетъ нашу мысль, потому что кривыя близки къ прямымъ и загибаются только около начала длины. Впрочемъ, только новые опыты рѣшатъ этотъ вопросъ окончательно.. *Д. Менделѣевъ.*

Значительное количество продѣланныхъ опытовъ затруднило бы разсмотрѣніе результатовъ, даже сгруппированныхъ вышеупомянутымъ способомъ. Поэтому данныя опытовъ выбраны (сгруппированы) такимъ образомъ, что они частью служатъ указаніями на вліяніе извѣстнаго измѣненія условій (о чемъ будетъ сейчасъ реферировано), частію же, — для точно провѣренныхъ случаевъ—указываютъ на точность опытовъ. Послѣднее видно не только изъ гармонической правильности въ ходѣ кривыхъ, проходящихъ точно чрезъ всѣ данныя точки, но и изъ совпаденія сосѣднихъ линій.

Результаты, на основаніи которыхъ были построены діаграммы по первому изъ двухъ способовъ, пополняли данныя для построенія общей кривой по второму способу (Plate VII, черт. 108, листъ 9-й). Кривыя линіи на черт. 108 выражаютъ отношеніе сопротивленія къ длинѣ; онѣ притомъ выражаютъ здѣсь окончательные аналитическіе результаты опытовъ, касающихся одного только свойства поверхности, именно длины, которая доводилась до 50 футовъ, такъ какъ это наибольшая длина, какую дозволялъ аппаратъ. Казалось желательнымъ опредѣлить вліяніе длины поверхности, прежде чѣмъ приступить къ испытанію различныхъ свойствъ поверхности.

Способъ, какимъ образомъ получились окончательные результаты, изображенные діаграммами, требуетъ нѣкотораго объясненія.

Я началъ цѣлый рядъ опытовъ надъ досками различной длины — отъ одного до пятидесяти футовъ, но имѣющими одинаковое качество поверхности. Анализъ результатовъ этого рода опытовъ далъ линіи, похожія на точечныя линіи (aa), черт. 108. Онѣ, какъ видно, выпуклы противъ основанія. Это указываетъ, что треніе на единицу поверхности въ дѣйствительности уменьшается по мѣрѣ увеличенія длины поверхности.

Въ тоже время форма линіи по мѣрѣ приближенія ея къ нулю скорости указываетъ, что или вліяніе тренія гораздо болѣе выражено на первыхъ двухъ футахъ поверхности, или что здѣсь (на первыхъ 2-хъ футахъ длины) присоединяется значительное сопротивленіе тѣла самой доски (т. е. сопротивленіе, зависящее отъ толщины доски). Къ тому же линіи, полученныя, если соединить всѣ точки, опредѣленныя опытомъ для досокъ разной длины при одной скорости, не образуютъ одной правильной кривой. Можно было бы предположить, что это зависитъ отъ неточности аппарата, если бы повторенія опыта не давали всегда тожественныхъ результатовъ и если бы, какъ было уже сказано, данныя для каждой отдѣльной доски не представляли между собою совершеннаго тождества. Слѣдовательно, разногласіе возникло вслѣдствіе небольшой разницы между различными досками, а также, вѣроятно, отъ различія въ толщинѣ или свойствѣ края концовъ досокъ; другими словами, должно думать, что измѣненіе этихъ свойствъ (толщины и носовыхъ частей доски) увеличиваетъ или уменьшаетъ сопротивленіе.

Чтобы рѣшить, на сколько измѣненіе кривой у ея начала, т. е. у нуля скорости и длины, зависитъ отъ этихъ послѣднихъ условій, были

сдѣланы слѣдующіе опыты: передній край испытываемыхъ досокъ, который состоялъ изъ вышеупомянутой обшивки или водорѣза (катъ-ватера) и удерживалъ доски на мѣстѣ, былъ въ горизонтальномъ разрѣзѣ пріостренъ, начиная отъ толщины доски приблизительно до $^1/_{10}$ дюйма и оканчивая округленіемъ, какъ показано на черт. 104 и тамъ обозначено AA. На заднемъ концѣ доски не было обшивки, и край ея былъ просто прямоугольно срѣзанъ, какъ это видно на томъ же рисункѣ. Ясно, что если бы было какое либо значительное сопротивленіе, зависящее отъ этихъ тупыхъ концовъ, на что, повидимому, указываютъ линіи AA на табл. VII (черт. 108), то малѣйшее различіе въ толщинѣ концовъ, которое было у различныхъ досокъ, выразилось бы достаточно разногласіемъ результатовъ. Исходя изъ этого предположенія, были сдѣланы совмѣстные опыты съ нѣкоторыми изъ только что испытанныхъ досокъ различной длины, но замѣняя переднюю часть (носъ) такою, которая, начинаясь съ толщины доски, при крайнихъ и послѣднихъ 6-ти дюймахъ, заканчивалась очень тонкимъ и заостреннымъ краемъ. Это видно въ горизонтальномъ разрѣзѣ на черт. 104, гдѣ и обозначено B. Измѣненіе это произвело незначительное уменьшеніе въ суммѣ сопротивленій всѣхъ досокъ; уменьшеніе это было болѣе значительнымъ у короткихъ, нежели у длинныхъ досокъ. Результаты измѣненія, хотя слишкомъ малые, указаны линіей $a'a'$ на таб. VII (черт. 108). Затѣмъ, произведены опыты надъ задними краями досокъ, заостренными точно также какъ и передній край (рис. 104 BC). Въ результатѣ опытовъ (выраженныхъ линіей $a''a''$, черт. 108), получилось еще гораздо большее уменьшеніе сопротивленія, и уменьшеніе это было, какъ и въ опытахъ съ переднимъ заостреннымъ концомъ, сравнительно болѣе значительнымъ при болѣе короткой продольной оси досокъ.

Для того, чтобы получить еще болѣе точную величину, посредствомъ которой можно было бы исправить выводы относительно всѣхъ остальныхъ испытанныхъ досокъ, задніе края которыхъ имѣли различную толщину, былъ сдѣланъ опытъ надъ одною изъ наиболѣе короткихъ досокъ (длиною 2 фута 6 дюймовъ), доводя толщину ея тупаго задняго конца до толщины самой остроконцевой доски (уменьшеніе почти $^1/_{16}$ дюйма). Результаты этого опыта видны на таб. V (черт. 106). На этой таблицѣ сопротивленіе доски съ толстымъ заднимъ краемъ представлено линіей, обозначенной буквой A''', сопротивленіе этой же доски; при болѣе тонкомъ заднемъ краѣ, изображено линіей A''; оно же при совершенно остромъ краѣ представлено линіей A.

Важно замѣтить здѣсь, что разность между уменьшеніемъ сопротивленія отъ замѣны тупого задняго конца острымъ и уменьшеніемъ сопротивленія вслѣдствіе замѣны тупого передняго конца острымъ, повидимому, вполнѣ согласуется съ различіемъ, замѣченнымъ при отступленіи отъ первоначальной формы съ тупымъ заднимъ концомъ (передній конецъ былъ нѣсколько пріостренъ и округленъ, задній былъ срѣзанъ четыреугольникомъ (черт. 104, AA'). Это было доказано опытомъ съ вышеупомянутой доской, длиною 2 фута 6 дюймовъ, задній конецъ которой былъ заостренъ наподобіе водорѣза (носа). Результаты представ-

лены на таблицѣ V (черт. 106) точечными линіями $A'A'$, AA. Изъ нихъ можно видѣть, что разность сопротивленій досокъ съ округленнымъ заднимъ краемъ и съ краемъ совершенно острымъ сравнительно мала.

Приложеніе поправокъ, полученныхъ такимъ образомъ, какъ я здѣсь описалъ, къ результатамъ опытовъ, сдѣланныхъ предварительно — дало кривыя сопротивленія по отношенію къ длинѣ, сходныя съ линіей обозначенной $A''A''$ на черт. 108 (VII). При этихъ поправкахъ исчезаетъ разногласіе между данными для различныхъ досокъ. Однако сюда невключены тѣ опыты, которые сдѣланы надъ досками короче 1 фута 6 дюймовъ, такъ какъ это наименьшая длина, которая могла быть допущена при имѣющемся носѣ. Для того, чтобы распространить линію (кривую) по возможности ближе къ нулевой точкѣ длины и сопротивленія, было бы очень желательно пополнить опыты, употребляя очень короткія и очень тонкія доски. При этомъ можно было бы опредѣлить свойство кривой уже при самомъ ея началѣ, и рѣшить, не зависитъ ли сопротивленіе отъ толщины испытуемой доски.

Также необходимо было исключить изъ результатовъ нѣкоторое постоянное, завѣдомо существующее сопротивленіе, а именно: то, которое зависитъ отъ сопротивленія воздуха движущемуся бруску, то, которое происходитъ отъ части водорѣза, выступающей изъ воды надъ верхнимъ краемъ досокъ, и то сопротивленіе, которое зависитъ отъ выступовъ и неправильностей поверхности досокъ и обусловливается ихъ скрѣпленіемъ. Изъ этихъ сопротивленій — сопротивленіе воздуха было опредѣлено прямымъ опытомъ, зависящее отъ выстающей части водорѣза можно было вычислить при помощи уже имѣющихся данныхъ, а сопротивленіе отъ выступовъ и т. д. опредѣлялось, употребляя доску въ 1 футъ 6 дюймовъ съ поверхностью, смазанной параффиномъ и покрытой лакомъ. Исключеніе этихъ постоянныхъ изъ результатовъ дало стройныя линіи, показанныя на таблицѣ VII [1]).

Я не могъ рѣшить сколько нибудь удовлетворительно вышепоименованной задачи, именно опредѣлить треніе досокъ очень малой длины, по трудности направлять очень тонкія доски. Однако же, я получилъ хорошіе результаты съ 12-ти и 6-ти дюймовыми досками (см. черт. 104, *D*, *E*), заостренными по обоимъ концамъ и въ продольномъ разрѣзѣ почти одинаковыми съ концами доски въ 1 футъ 6 дюймовъ. Изъ опытовъ съ ними получились точки, чрезъ которыя проходятъ кривыя (на рис. VII), относящіяся къ доскѣ длиною 1 футъ 6 дюймовъ.

Хотя нѣтъ удачныхъ опытовъ съ досками различной толщины и одинаковой длины, но мы врядъ ли можемъ считать недоказаннымъ существованіе нѣкотораго сопротивленія, зависящаго отъ толщины доски, какъ бы незначительно ни было это сопротивленіе у испытанныхъ досокъ. Это очевидно изъ слѣдующаго. Если кривую сопротивленія

---

[1]) Нужно, однако, замѣтить, что шкала сопротивленія, показанная на рис. VII, даетъ не дѣйствительное сопротивленіе, представляемое испытываемыми досками, но сопротивленіе, приведенное къ поверхности шириною въ *одинъ футъ* и показанной длины.

(діаграммъ) свести къ нолю длины и скорости, то оказывается, что треніе на единицу поверхности на первыхъ 6-ти дюймахъ (длины) уменьшается съ увеличеніемъ длины поверхности быстрѣе, чѣмъ это можно ожидать по діаграммѣ изъ опытныхъ данныхъ (для досокъ большой длины). Другими словами, у начала получается кривая съ большей кривизной, чѣмъ это слѣдовало бы, еслибы сопротивленіе увеличивалось пропорціонально длинѣ, въ то время, какъ въ остальной части діаграммы кривизна линіи уменьшается постепенно по мѣрѣ увеличенія длины доски. При всемъ этомъ тонина испытанныхъ досокъ и незначительность уменьшенія сопротивленія отъ замѣны закругленныхъ концовъ заостренными на подобіе ножа — не позволяютъ обозначить сопротивленіе, зависящее отъ толщины, какой либо опредѣленной величиной.

Также очень желательно распространить эти опыты надъ поверхностями, болѣе длинными, чѣмъ тѣ, съ которыми лишь возможно было экспериментировать при имѣющемся аппаратѣ: бассейнъ для опытовъ дѣлалъ это почти неисполнимымъ. Я постараюсь сдѣлать нѣкоторыя приспособленія, при помощи которыхъ можно испробовать доски большей длины.

При описаніи результатовъ я очень долго остановился на вопросѣ о вліяніи длины поверхности на сопротивленіе. Теперь я приступаю къ вопросу о качествѣ поверхности.

Различныя испытанныя поверхности были слѣдующія: 1) шеллаковый лакъ; 2) составъ *Гэ* (Hay's Composition); 3) составъ Пикока (Peacock's compos.); 4) сало; 5) клей; 6) гладкая металлическая поверхность, полученная вслѣдствіе обшивки оловянными листами.

Сравненія между первыми тремя поименованными поверхностями были сдѣланы надъ досками длиною въ 5, 16 и 50 футовъ. Каждая изъ нихъ была сперва испытана покрытою составомъ Гэ и вслѣдъ за тѣмъ покрытою составомъ Пикока. Всѣ три доски были предварительно испытаны покрытыми шеллаковымъ лакомъ. Сравненіе между шеллакомъ и составомъ Гэ представлено на рис. IV (105), на которомъ линіи, обозначенныя A, C и D, представляютъ результатъ опытовъ съ шеллакомъ, а точечныя линіи A', C' и D'—съ составомъ Гэ. Эти два результата съ практической точки зрѣнія я считаю одинаковыми, такъ какъ замѣчаемая незначительная разница могла возникнуть отъ какого либо другаго различія въ условіяхъ опыта съ этими досками; притомъ видно, что едва замѣтное различіе кривой DD' для 5-футовой доски совершенно противоположно по характеру тому, который выраженъ кривыми $A'A$ и $B'B$.

Результаты, относительно состава Пикока, не показаны на рисункѣ, такъ какъ практически они одинаковы съ двумя предъидущими. Поверхность, покрытая саломъ, была испытана единственно посредствомъ доски въ 16 футовъ; полученные результаты не разнились отъ предъидущихъ, такъ какъ кривая (изображающая результаты) занимаетъ средину между кривой шеллака и состава Гэ.

Поверхность, покрытая клеемъ, испытывалась какъ образецъ клей

кой, рыбоподобной поверхности, отчасти смываемой водою. До погруженія въ воду, клей былъ засохшій (затвердѣвшій). Для того, чтобы опредѣлить измѣненіе условій сопротивленія, происходящее отъ погруженія въ воду такой поверхности, были сдѣланы три, одинъ за другимъ, опыта съ одной и той же доской, покрытой клеемъ при одинаковой скорости движенія. Притомъ найдено, что въ теченіи этихъ опытовъ сопротивленіе увеличивалось: при первомъ оно было на два процента, а при третьемъ—болѣе чѣмъ на четыре процента болѣе сопротивленія поверхности изъ шеллака. Это, очевидно, указываетъ, что сопротивленіе увеличивалось съ разрыхленіемъ, размягченіемъ поверхности [1]).

Испытывая поверхность, покрытую оловянными листами, я нашелъ, что это единственная поверхность, которой сопротивленіе значительно разнится отъ сопротивленія лакированной. Притомъ замѣчательно, что разница уменьшается при бо́льшей длинѣ поверхности. Было очень непріятно, что, благодаря замедленію, которое я испыталъ, пріобрѣтая листы олова для этого случая, невозможно было, по недостатку времени, къ сроку этого отчета сдѣлать опыты съ досками длиннѣе 16 футовъ. Сравненія поверхностей, покрытыхъ листами олова и лакированныхъ, были сдѣланы надъ досками въ 16 футовъ, въ 1 ф. 6 дюймовъ и въ 1 ф. Данныя, полученныя для 16-футовой доски, обшитой оловомъ, представлены точечной линіей C'' на рис. IV (105); для досокъ въ 1 ф. и 1 ф. 6 дюймовъ, также обшитыхъ оловянными листами—точечными линіями B' и C' на рис. V (106). Для сравненія съ ними по рис. V посредствомъ линій B и C представлены результаты, полученные для лакированной поверхности той же длины. Изъ этихъ линій видно, что различіе въ сопротивленіяхъ оловянныхъ листовъ и лака не только уменьшается пропорціонально увеличенію длины поверхности, но также уменьшается и пропорціонально возрастанію скорости. Такимъ образомъ, законъ увеличенія сопротивленія по отношенію къ скорости, очевидно, различенъ, смотря по тому, будетъ ли поверхность покрыта оловянными листами, лакирована или представлять одну изъ вышепоименованныхъ поверхностей.

---

[1]) Мнѣ кажется, дѣло проще объясняется тѣмъ, что отъ разбуханія клея, которымъ покрыта доска, толщина движущагося предмета, а вмѣстѣ съ тѣмъ и поперечное сѣченіе или мидель, увеличивается, а оттого возрастаетъ и сопротивленіе. *Д. Менделѣевъ.*

Приложеніе 7-е.

ВТОРАЯ СТАТЬЯ ФРОУДА О ТРЕНІИ.

Взята изъ Report of the British Association for the Avancement of science. 1874 г., стр. 249 (перевелъ Н. П. Азбелевъ).

Рапортъ лордамъ-коммиссіонерамъ адмиралтейства объ опредѣленіи того сопротивленія, которое происходитъ отъ тренія поверхностей о воду при разныхъ условіяхъ, по опытамъ, произведеннымъ въ Чельстонъ-Кроссѣ Вильямомъ Фроудомъ, членомъ королевскаго общества.

Чельстонъ-Кроссъ, 13 декабря 1872 г.

Результаты, о которыхъ я буду говорить въ этомъ рапортѣ, вмѣстѣ съ сообщенными мною въ прошломъ августѣ мѣсяцѣ, бросаютъ свѣтъ на слѣдующіе три главные вопроса:

1) Законъ измѣненія сопротивленія въ зависимости отъ измѣненія скорости.

2) Законъ измѣненія сопротивленія въ зависимости отъ длины испытуемой поверхности.

3) Характеръ измѣненія сопротивленія въ зависимости отъ качества испытуемой поверхности.

Изъ примѣровъ, которые я приведу здѣсь, также какъ и изъ тѣхъ, о которыхъ упоминалось въ первомъ рапортѣ, видно будетъ, что всѣ эти три закона находятся въ нѣкоторой связи между собою.

Цѣлью послѣдней серіи моихъ опытовъ было по возможности точное опредѣленіе вліянія на треніе степени гладкости или шероховатости поверхности. Вотъ списокъ матеріаловъ, которыми покрывались испытуемыя поверхности: 1) листовое олово (фольга); 2) парафинъ, налитый тонкимъ слоемъ и гладко отполированный (онъ также употреблялся, какъ подкладка подъ фольгу; средствомъ скрѣпленія служилъ тонкій слой сала); 3) карандашный порошокъ, наведенный политурой на парафинъ; 4) небѣленный коленкоръ; 5) три сорта песку: крупнозернистый, средній и мелко-зернистый. Песокъ насыпался также на слегка разогрѣтый слой парафину, по охлажденіи котораго держался достаточно крѣпко.

Понятно, что было довольно трудно соблюсти совершенную тождественность во 1-хъ по всей длинѣ поверхности одной и той же доски, и во-2-хъ (a fortiori) между одинаковыми поверхностями досокъ различной длины. Въ случаѣ гладкихъ поверхностей легче всего было достигнуть однообразія при полированныхъ парафиновыхъ; а въ случаѣ шероховатыхъ—при обтянутыхъ коленкоромъ.

Въ какой степени допускалась неодинаковость, можно видѣть на листѣ XII, на которомъ приложены полныя фотографическія изображенія нѣкоторыхъ поверхностей [1]).

---

[1]) Эти фотографіи я не считалъ нужнымъ воспроизводить въ этомъ изданіи. *Д. М.*

При опытахъ я старался исключить вліяніе толщины водорѣза, для чего концы досокъ были таковы, какъ показано на черт. 104, B, листъ 8. Въ случаѣ коленкоровой поверхности употреблялся особенно тонкій водорѣзъ въ 1 дюймъ длиною, а самъ коленкоръ былъ тщательно натянутъ по всей длинѣ и туго обхватывалъ задній конецъ доски.

Полученные результаты въ подробностяхъ показаны на прилагаемыхъ здѣсь четырехъ діаграммахъ, которыя, какъ и въ 1-мъ рапортѣ, можно раздѣлить на двѣ формы. Въ одной (табл. VIII-й и IX-й [1]) абсциссы, или величины, откладываемыя по основной линіи, представляютъ скорость, въ другой (табл. X и XI)—онѣ представляютъ длины поверхности. Соотвѣтствующія ординаты въ обоихъ случаяхъ показываютъ сопротивленія.

Въ 1-й серіи каждая изъ послѣдовательныхъ длинъ поверхности имѣетъ группу своихъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ *качествамъ* поверхности и показывающихъ законъ сопротивленія въ зависимости отъ *скорости*.

Во 2 й серіи каждая изъ послѣдовательныхъ скоростей движенія имѣетъ группу своихъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ *качествамъ* поверхности и показывающихъ законъ сопротивленія въ зависимости отъ *длины* поверхности. Въ обѣихъ діаграммахъ даны еще кривыя, полученныя при испытаніи поверхности, покрытой лакомъ (шеллакъ); онѣ сняты съ діаграммъ, приложенныхъ при первомъ рапортѣ, и служатъ для сравненія, такъ какъ прежніе опыты показали, что лаковая поверхность можетъ считаться какъ бы типичною; это во-первыхъ потому, что лакъ легко кладется по всей длинѣ одинаковыми слоями, а во-вторыхъ — потому, что въ отношеніи сопротивленія онъ представляетъ тѣже свойства, что и композиція Гэя или Пикока, или сало, которыя часто приходится употреблять на практикѣ.

Испытуемыя доски, какъ и прежде, были около 19 дюймовъ ширины (или высоты, черт. 103); на нашихъ діаграммахъ сопротивленія показаны для каждой доски во-первыхъ на полную длину ея поверхности, а во-вторыхъ, на каждый квадратный футъ ея при различныхъ длинахъ.

Мы увидимъ дальше, что діаграммы обѣихъ формъ можно получить одну изъ другой.

Результаты опытовъ показаны также и въ прилагаемой таблицѣ, въ болѣе сокращенномъ, но за то, конечно, въ менѣе точномъ видѣ. Таблица представляетъ среднія сопротивленія на квадратный футъ для досокъ различной длины и съ различными поверхностями при скорости движенія въ 600 футъ въ минуту; но по ней можно разсчитать и сопротивленія, соотвѣтствующія другимъ скоростямъ, такъ какъ тамъ показаны тѣ степени скорости, пропорціонально которымъ (приблизительно) возрастаютъ сопротивленія [2]).

---

[1]) Черт. 109,=VIII Фроуда, черт. 110=IX табл. Фроуда. Его таблицы X и XI я не считалъ надобными, п. ч. онѣ даютъ тоже, что VIII и IX, а потому и не приложилъ къ этому изданію. *Д. М.*

[2]) Предполагается, какъ у Хуттона и Бофуа, что сопротивленіе $R=kv^n$, гдѣ v скорость и n показатель или степень, въ которую должно ее возвысить, чтобы получить сопротивленіе. *Д. Менделѣевъ.*

Въ таблицѣ подъ цифрами, показывающими длину поверхности, стоятъ три столбца А, В, С; въ нихъ показано слѣдующее:

Въ А.—Степень (показатель) скорости, пропорціонально (приблизительно) которой возрастаетъ сопротивленіе.

Въ В.—Среднее сопротивленіе на квадратный футъ поверхности, получаемое черезъ раздѣленіе всего сопротивленія доски на число квадратныхъ футовъ ея поверхности (скорость 600 футъ въ минуту).

Въ С.—Сопротивленіе на квадратный футъ поверхности въ томъ мѣстѣ досби, которое отстоитъ отъ водорѣза на число футъ, означенное въ заголовкѣ.

Смотря на дѣло съ практической точки зрѣнія, можно считать результаты, показанные въ таблицѣ и діаграммахъ, за *подлинные факты*. выведенные съ большою тщательностью и точностью изъ неоднократныхъ опытовъ. Примѣромъ согласія ихъ могутъ служить діаграммы IV въ 1-мъ рапортѣ (черт. 105), гдѣ показано насколько мѣста точекъ, полученныя прямо изъ наблюденія, отступаютъ отъ согласной кривой, названной мною кривою сопротивленій. Въ практическомъ примѣненіи этихъ результатовъ также не встрѣчается затрудненій, заслуживающихъ объясненія, исключая развѣ только того, что трудно опредѣлить, къ какой изъ поверхностей, употребленныхъ при опытахъ, наиболѣе подходитъ данная поверхность, по своему качеству и степени своей гладкости.

Смотря же на дѣло съ теоретической точки зрѣнія. мы увидимъ, что нѣкоторые результаты представляютъ поразительныя аномаліи.

Правда, что табличные показатели (А) скорости для различн. поверхностей почти одинаковы при всякой длинѣ досокъ; вмѣстѣ съ длиною они собственно уменьшаются, но уменьшеніе это такъ незначительно, что имъ можно пренебречь. Затѣмъ. если мы сопротивленіе при скорости въ 600 футовъ въ минуту примемъ за основное и по немъ, помощью табличныхъ показателей, разсчитаемъ сопротивленіе при другихъ скоростяхъ, то для всѣхъ поверхностей получимъ результаты чрезвычайно близкіе къ показываемымъ діаграммами; сказанное особенно справедливо для той поверхности, которую мы назвали типичною, т. е.—для покрытой лакомъ.

Но вышеупомянутая правильность придаетъ тѣмъ болѣе вѣсу аномаліямъ въ сопротивленіяхъ, являющимся въ другихъ отношеніяхъ слѣдствіемъ различнаго вліянія на сопротивленіе качества поверхности; такъ напримѣръ, сравнивая поверхности, покрытыя листовымъ оловомъ и парафиномъ, т. е. обѣ чрезвычайно гладкія, съ *менѣе гладкою* и, слѣдовательно, болѣе сопротивляющеюся поверхностью, покрытою лакомъ, мы находимъ, что послѣдняя имѣетъ *мѣньшаго* показателя скорости, чѣмъ первыя: для листоваго олова показатель=2,0, для парафина онъ—1,94, а для лаку — 1,85. — Напротивъ, сличая сравнительно гладкую поверхность съ поверхностями: коленкоровою и песчаною, которыя гораздо *болѣе шероховаты* и испытываютъ гораздо больше сопротивленія, мы находимъ, что послѣднія, т. е. *менѣе гладкія*, имѣютъ на этотъ разъ уже не мѣньшаго, а *бо́льшаго* показателя

Длина поверхности или разстояніе отъ водорѣза въ футахъ.

	2 фута.			8 футовъ.			20 футовъ.			50 футовъ.		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Лакъ	2,00	.41	.390	1,85	.325	.264	1,85	.278	.240	1,83	.250	.226
Парафинъ . .	1,95	.38	.370	1,94	.314	.260	1,93	.271	.237	. . .	. . .	. . .
Листовое олово (фольга) . .	2,16	.30	.295	1,99	.278	.263	1,90	.262	.244	1,83	.246	.232
Коленкоръ . .	1,93	.87	.725	1,92	.626	.504	1,89	.531	.447	1,87	.474	.423
Мелкій песокъ .	2,00	.81	.690	2,00	.583	.450	2,00	.480	.384	2,06	.405	.337
Средній песокъ .	2,00	.90	.730	2,00	.625	.488	2,00	.534	.465	2,00	.488	.456
Крупный песокъ.	2,00	1,10	.880	2,00	.714	.520	2,00	.588	.490	. . .	. . .	. . .

скорости, чѣмъ первыя: показатель для лаковой поверхности, какъ мы сказали, равенъ 1,85, для коленкора онъ 1,93, а для песчаной 2,00 (только въ одномъ случаѣ 2,06 [1]).

Случай оловянной поверхности чрезвычайно замѣчателенъ: при очень короткихъ доскахъ сопротивленіе составляетъ немного болѣе, чѣмъ половину сопротивленія лаковой поверхности; вѣроятно, это зависитъ отъ бо́льшаго ея показателя скорости, которому сопротивленіе пропорціонально, и отъ медленнаго уменьшенія его въ зависимости отъ длины поверхности; при длинѣ же въ 50 фут. среднее сопротивленіе оловянной поверхности явно менѣе чѣмъ лакированной, а сопротивленіе на квадратный футъ ея при самомъ концѣ 50-ти футовой доски больше, чѣмъ для лакированной.

Правда, эта аномалія частью зависитъ и отъ того обстоятельства, что покрывать листовымъ оловомъ длинныя доски труднѣе, чѣмъ короткія; поэтому можетъ быть гладкость ихъ была менѣе совершенна, и сопротивленіе нѣсколько увеличилось; но, принимая во вниманіе и это обстоятельство, аномалію все таки должно считать замѣчательной.

Затѣмъ, не представляется никакого раціональнаго объясненія для уклоненій, являющихся въ законѣ измѣненія сопротивленія въ зависимости отъ длины въ случаѣ болѣе шероховатыхъ и болѣе сопротивляющихся поверхностей. Напримѣръ, сопротивленіе поверхности, покрытой среднимъ пескомъ, измѣняется непропорціонально мало къ концу доски; да и для всѣхъ подобныхъ поверхностей такое уменьшеніе оказывается медленнѣе, чѣмъ бы слѣдовало ожидать. Безъ сомнѣнія, это обстоятельство происходитъ частью отъ того, что трудно по всей поверхности достичь одинаковой ровности слоя песку или другого матеріала, а кромѣ того, надо еще открыть точную причину, производящую уменьшеніе сопротивленія къ концу доски, хотя едва ли можно сомнѣваться, что причина эта такъ или иначе лежитъ въ теченіяхъ, создаваемыхъ самымъ движеніемъ поверхности [2]).

---

[1]) Объ эти аномаліи понятны, если устранить ся отъ предвзятыхъ идей Фроуда. Онѣ сводятся къ тому, что въ $R = kv^n$ для олова $n = 2{,}0$, для лака 1,85, для песка 2,0. Но во-первыхъ (см. таблицу стр. 67) для олова и лака при длинѣ=50 ф., показатель n=1,83—одной и той же величинѣ, во-вторыхъ, вообще, точность опытовъ не такъ велика, чтобы уловить малыя разности сопротивленій при гладкихъ поверхностяхъ, какъ видно даже по непараллельности кривыхъ на черт. 108, 109; въ-третьихъ, какъ объяснено въ главѣ I, стр. 63, 64 и 69, шероховатости давали поводъ являться прямымъ сопротивленіямъ, дѣйствующимъ на выступы, а законы прямаго и продольнаго сопротивленій, вѣроятно, не выражаются одинаковыми n. *Д. Менделѣевъ.*

[2]) Всѣ аномаліи, разбираемыя въ послѣднихъ параграфахъ и кажущіяся непонятными съ перваго раза, объясняются простѣйшимъ образомъ предвзятою идеею Фроуда (имъ развиваемою, вслѣдъ за Понселе), не выдерживающею критики съ физической стороны, потому что процессъ внутренняго тренія еще вообще не ясенъ, а затѣмъ — разностью степени неровностей, различіемъ досокъ (стр. 63) и, главное, малыми численными разностями, впадающими въ предѣлъ возможныхъ погрѣшностей, какъ видно по разсчетамъ гл. I, стр. 64 и слѣд. Вслѣдъ за этимъ Фраудъ развиваетъ мысль о томъ, что передняя части доски производятъ такое теченіе, которое дѣлаетъ сопротивленіе заднихъ концовъ

Хотя мои опыты производились надъ досками не длиннѣе 50 фут., но они представляютъ данныя, достаточныя для того, чтобы можно было практически съ сноснымъ приближеніемъ предсказать сопротивленіе на поверхности такой длины, съ какой встрѣчаемся при постройкѣ кораблей. Такъ какъ уже видѣли однажды, что при длинѣ въ 50 фут. уменьшеніе (съ увеличеніемъ длины) тренія на квадратный футъ поверхности для каждаго *прибавочнаго* фута длины такъ мало, что все равно, разсчитаемъ ли мы полное сопротивленіе на всю длину 300 футовой доски въ предположеніи, что при послѣднихъ двухстахъ пятидесяти футахъ уменьшеніе происходитъ въ одинаковой мѣрѣ на каждый футъ, или прямо возьмемъ сопротивленіе на 50-ти футовую доску.— Истина, очевидно, лежитъ между этими двумя предположеніями.

Приложеніе 8-е.

ЧТЕНІЕ ФРОУДА ОБЪ ЕГО ОПЫТАХЪ НАДЪ СОПРОТИВЛЕНІЕМЪ ВОДЫ.

Переведено изъ книги: South Kensington Museum. Conferences held in Connection with the special loan collection of scientific apparatus. 1876. Physics and Mechanics, стр. 298. (Перевелъ Н. П. Азбелевъ).

То, о чемъ я буду говорить здѣсь, можно раздѣлить на три части: во-первыхъ, я познакомлю слушателей съ главной цѣлью моихъ изслѣдованій; во-вторыхъ, поясню на сколько, по моему мнѣнію, цѣлесообразно производить опыты надъ моделью корабля для опредѣленія истинныхъ мореходныхъ качествъ послѣдняго, и, наконецъ, въ третьихъ,—приведу добытые мною результаты.

Я занимаюсь опредѣленіемъ сопротивленія воды на модель корабля, движущуюся съ различными скоростями, и вопросомъ, какъ опредѣлить по сопротивленію на модель сопротивленіе на самый корабль. Для бо́льшаго удобства я ввелъ новую кривую, которую назвалъ «*кривой сопротивленій*». Она получится, если по одной изъ прямоугольныхъ осей координатъ откладывать скорости въ какихъ-бы то ни было единицахъ ея, а по соотвѣтствующимъ ординатамъ величины сопротивленій. Кривая сопротивленій соединяетъ конечныя точки ординатъ. Опытъ показалъ, что она съ достаточной точностью даетъ возможность опредѣлить сопротивленіе на модель при какой угодно промежуточной скорости.

доски меньшимъ, чѣмъ переднихъ ея частей. Я считалъ излишнимъ воспроизводить эту теоретическую часть рапорта Фроуда, потому что имѣлъ въ виду здѣсь дать отчетъ объ опытахъ, а въ слѣдующемъ приложеніи словами Фроуда разсказаны его теоретическія представленія. *Д. Менделѣевъ.*

Прежде всего необходимо обсудить вопросъ, какимъ образомъ построить модель по возможности скоро, экономно и точно. Надо подъискать для этого матеріалъ болѣе удобный, чѣмъ дерево. Всѣмъ извѣстно, что постройка большой и точной деревянной модели требуетъ слишкомъ много времени, кропотливой и искусной работы и не мало издержекъ. Къ счастью, на помощь намъ является новый матеріалъ— параффинъ, дающій возможность сдѣлать модель въ шестнадцать футъ длиною впродолженіи двадцати четырехъ часовъ. Черезъ слѣдующіе восемь часовъ можно уже испытать всѣ ея свойства и вычертить кривую ея сопротивленій. Впрочемъ, замѣчу здѣсь, что для производства строгихъ и точныхъ опытовъ за такой скоростью гоняться нечего.

Не вдаваясь во всѣ подробности modus operandi, скажу только, что параффинъ удивительно поддается всѣмъ процессамъ отливки. Модель выливается въ глиняную форму, которой внутренность только *приблизительно* соотвѣтствуетъ внѣшнимъ обводамъ корабля, такъ-что пока нѣтъ надобности въ точныхъ формахъ. Внутри формы ставится, такъ называемая, сердцевина, сдѣланная изъ легкаго деревяннаго рѣшетчатаго набора; она обтягивается коленкоромъ и покрывается тонкимъ слоемъ глины и парижскаго пластыря, что дѣлаетъ ее непроницаемой для расплавленнаго парафина; на дно ея кладется легкій балластъ, такъ-что она стоитъ въ формѣ, какъ судно въ докѣ. Между стѣнками сердцевины и формы наливается параффинъ и сейчасъ-же вслѣдъ за этимъ внутренность сердцевины наполняется водою, которая не даетъ ей всплыть и въ тоже время способствуетъ охлажденію параффина. На слѣдующее утро, когда послѣдній совсѣмъ остынетъ, модель можно вынуть, обмыть, и въ грубомъ видѣ она готова.

Дальнѣйшая отдѣлка ея производится на стругальномъ станкѣ. Я не буду подробно описывать его: онъ похожъ на всѣ станки подобнаго рода. Модель помѣщается между двумя горизонтальными рѣзцами, которые, помощью особаго аппарата, приводятся въ такое положеніе, что намѣчаютъ на ней рядъ какъ угодно близкихъ грузовыхъ ватерлиній, снятыхъ съ чертежа модели. Это даетъ возможность простой стамеской обстрогать ее такъ, что внѣшніе обводы будутъ совершенно аналогичны съ обводами строющагося корабля. Параффинъ представляетъ великолѣпный матеріалъ для строганія, легко поддаваясь ему и въ тоже время совсѣмъ не портя стамески. Чтобы работающій, по ошибкѣ, не запустилъ инструмента слишкомъ глубоко, совѣтуемъ на обозначенныхъ рѣзцами ватерліяхъ дѣлать легкія наколки шиломъ и засыпать ихъ мелкимъ чернымъ порошкомъ. Тогда, если ватерліи нарѣзаны часто, можно достигнуть обводовъ замѣчательной точности. Когда модель готова, то нетрудно испробовать эту точность. Для этого взвѣшиваютъ ее и вычисляютъ по чертежу, сколько надо положить въ нее балласту, чтобы она погрузилась до той или другой ватерліи. Затѣмъ ее опускаютъ въ воду и наблюдаютъ, на сколько истинное углубленіе расходится съ вычисленнымъ. Если, для устраненія этого несогласія, при опытахъ съ моделями вѣсомъ 400 до 500 фунтовъ, мнѣ приходилось добавлять или вынимать три или 4 фунта балласта, то я считалъ мо-

дель недостаточно точной и мнѣ удавалось находить ошибку или въ ея обводахъ, или въ вычисленіи. Разницу до двухъ фунтовъ я допускалъ.

Теперь мы знаемъ какъ дѣлать модели, и я перехожу къ не менѣе важному вопросу, — къ производству самихъ опытовъ надъ ними. Опишу какъ это дѣлалось.

Модели, употребляемыя мною, были отъ шести до шестнадцати футъ длиною, отъ восемьнадцати дюйм. до двухъ футъ и шести дюймовъ шириною; вѣсили: 200, 600, 700 и 800 фунтовъ. Модели, какъ видите, не маленькія; точность ихъ доведена была до возможной степени, и потому полученные мною результаты я считаю довольно цѣнными и вѣскими.

Опыты производились въ покрытомъ навѣсомъ бассейнѣ воды, въ 280 фут. длиною, 10 футъ глубиною и 36 фут. шириною. Такимъ образомъ, длина большей изъ моихъ моделей относилась къ длинѣ бассейна, какъ длина самаго большаго морскаго корабля относится къ итальянской милѣ; глубину бассейна, сравнительно съ углубленіемъ модели, можно приравнять глубинѣ Британскаго канала, такъ что, значитъ, я оградилъ свои опыты отъ случайностей неправильнаго волненія, неизбѣжнаго на мелководьѣ.

Аппаратъ устроенъ такимъ образомъ:

Сейчасъ же надъ поверхностью воды свѣшиваются съ навѣса горизонтальныя, прочно и неподвижноукрѣпленныя рельсы. Снизу онѣ не поддерживаются ничѣмъ, такъ что ни модель, ни производимыя ею волны не встрѣчаютъ при своемъ движеніи никакихъ препятствій. По рельсамъ движется динамометрическая тележка, соединенная съ моделью параллельнымъ движечіемъ; послѣднее, такимъ образомъ, замѣняетъ буксиръ. Сопротивленіе воды на модель измѣряется растяженіемъ пружины, которое передается рычагу и заставляетъ карандашъ чертить по вращающемуся цилиндрическому бумажному барабану. Скорость вращенія барабана такова, что каждая точка его описываетъ по окружности одну пятую часть дюйма въ то время, какъ тележка проходитъ по рельсамъ одинъ футъ. Другой карандашъ, помощью часоваго механизма и гальваническаго тока, черезъ каждыя полъ-секунды прикасается къ барабану, намѣчая на немъ каждый разъ точку. Такимъ образомъ я получалъ полное и точное графическое изображеніе сопротивленія, соотвѣтствующаго опредѣленнымъ скоростямъ.

Скажу теперь, почему именно я употреблялъ параллельное соединеніе модели съ тележкой [1]).

Дѣло въ томъ, что если плавающему тѣлу, имѣющему симметрическіе обводы, сообщить въ водѣ прямолинейное движеніе, то оно не будетъ строго слѣдовать по одному направленію, а непремѣнно начнетъ уклоняться то вправо, то влѣво, иногда даже быстро становится поперегъ. Точно также при значительной длинѣ модели недостаточно удерживать строго по прямой линіи во все время движенія только носъ ея;

[1]) Приложеніе 6-е. *Д. М.*

тогда черезъ нѣсколько времени мы увидимъ, какъ корма начнетъ отходить въ стороны, уклоняясь на 5, на 6 и даже на 10 градусовъ отъ курса. По бортамъ ея тогда обращаются струи и водовороты, которые, конечно, увеличиваютъ сопротивленіе [1]). Параллельное соединеніе устраняетъ это вредное для опытовъ обстоятельство. Нисколько не вліяя на сопротивленіе при достаточно легкой рамѣ, оно все время удерживаетъ модель на прямой линіи, позволяетъ ей при этомъ свободно качаться на волнахъ, но никоимъ образомъ не допускаетъ уклоненій въ стороны.

Динамометрическая тележка приводится въ движеніе паровой машиной, съ которой соединяется проволочной веревкой. Машина снабжена весьма чувствительнымъ регуляторомъ, позволяющимъ сообщать ей желаемыя равномѣрныя скорости. Я производилъ опыты при скоростяхъ отъ 50 до 400 фут. въ минуту, но еслибы мнѣ было надо, то я могъ бы дать машинѣ ходъ со скоростью 1200 фут. въ минуту. Малѣйшая ошибка регулятора отзывалась на ходѣ кривой сопротивленій, что давало бы возможность избѣгать невѣрныхъ выводовъ.

Упомяну еще объ одномъ обстоятельствѣ, сопровождающемъ движеніе модели,—это о перемѣнѣ ея углубленія при различныхъ скоростяхъ. Насколько мнѣ извѣстно, до меня еще никто не обращалъ вниманія на это явленіе, а между тѣмъ оно, очевидно, вліяетъ на сопротивленіе. Я замѣтилъ, что при движеніи въ водѣ суда одной формы погружаются больше носомъ, другія же—больше кормой. При своихъ опытахъ я принялъ это во вниманіе, для чего устроилъ въ телѣжкѣ еще другой вращающійся бумажный барабанъ, на которомъ, помощью особаго аппарата, соединеннаго съ оконечностями модели, вычерчивалась новая діаграмма; она-то и показывала измѣненія въ углубленіяхъ кормы или носа модели.

Описавъ устройство моделей, способъ ихъ изготовленія и производство опытовъ надъ ними, постараюсь сдѣлать сравненіе между кривыми сопротивленій на самый корабль и на модель его. Для этого я долженъ сперва коснуться теоретической стороны вопроса.

Издавна за единицу сопротивленія воды на корабль принимали сопротивленіе на его миделевое сѣченіе и полагали, что, дѣлая обводы его къ оконечностямъ все острѣе и острѣе, можно уменьшить полное сопротивленіе до нѣкоторой дробной части того сопротивленія, которое приходилось бы на движущійся мидель, если бы плоскость его была перпендикулярна къ направленію движенія; было предложено много математическихъ и эмпирическихъ формулъ для опредѣленія истиннаго дробнаго множителя. Теперь математикамъ уже извѣстна неоснователь-

---

[1]) А именно такъ и было опредѣляемо треніе, потому что доски прикрѣплялись только въ носу, какъ видно изъ приложенія 6-го и изъ рисунка 103. О мѣрѣ уклона тонкой, *гибкой* дощечки мы, конечно, не много можемъ знать, но сказанное здѣсь пишетъ въ 1876 году тотъ самый Фроудъ, который въ 1872 г. дѣлалъ самъ подобныя опредѣленія; а потому я имѣлъ право сказать то, что̀ написано въ главѣ 1-й, стр. 62, и вообще питать нѣкоторое сомнѣніе въ точности данныхъ Фроуда. *Д. Менделѣевъ.*

ность обыкн. точки зрѣнія на этотъ вопросъ, и въ недавніе годы, нѣкоторыми знаменитостями выработана вполнѣ опредѣленная и убѣдительная теорія, называемая теоріей струйныхъ линій. Она точно объясняетъ движеніе частицъ воды, окружающихъ движущееся на ней тѣло, а также взаимное дѣйствіе ихъ другъ на друга и на самое тѣло, при томъ, впрочемъ, допущеніи, что въ водѣ не существуетъ тренія. Теорія струйныхъ линій говоритъ, что если бы не было въ водѣ тренія, то рыба, разъ прійдя въ движеніе, продолжала-бы плыть дальше, не испытывая никакого сопротивленія. Предположеніе звучитъ чрезвычайно парадоксально, но я не боюсь продолжать свое изложеніе въ еще болѣе парадоксальной формѣ. Упомянутая теорія доказала въ высшей степени убѣдительно, что не будь въ водѣ тренія, то даже плоскость, составляющая прямой уголъ съ направленіемъ движенія, не испытывала-бы никакого сопротивленія. Послѣднее являлось-бы только при началѣ движенія, т. е. при выходѣ тѣла изъ покоя; причина этого заключается въ динамическихъ условіяхъ окружающихъ частицъ жидкости. Эти послѣднія вмѣстѣ съ частицами, непосредственно обтекающими тѣло, должны также прійти въ движеніе, а для этого необходимо преодолѣвать силу ихъ взаимной вязкости; эта-то сила и рождаетъ начальное сопротивленіе; но какъ скоро движеніе установилось, сопротивленіе исчезаетъ. Сходящіяся струи позади плоскости или тѣла оказывали-бы на заднюю его поверхность такое-же давленіе, какое испытывала-бы его передняя поверхность, выводящая при своемъ движеніи изъ естественнаго положенія встрѣчныя частицы жидкости, которыя образовали-бы расходящіяся струи. Повторяю, это кажется парадоксальнымъ, но справедливость этого мы докажемъ рядомъ слѣдующихъ разсужденій.

Вмѣсто того, чтобы заставить тѣло двигаться въ жидкости по извѣстному направленію, представимъ себѣ, что сама жидкость движется въ противуположномъ направленіи, а тѣло остается въ покоѣ; очевидно, въ обоихъ этихъ случаяхъ частицы жидкости будутъ въ тождественныхъ условіяхъ; поэтому мы и будемъ относить всѣ разсужденія къ послѣднему предположенію, такъ какъ оно позволяетъ скорѣе прійти къ тѣмъ выводамъ, которые я хочу поясннть здѣсь. Если-бы въ жидкости не было тѣла, то всю движущуюся массу ея можно было-бы раздѣлить на мелкія отдѣльныя струи, текущія всѣ по извѣстному направленію *ad infinitum*. Но какъ только въ жидкость вторгается неподвижное тѣло, такъ эти струи претерпѣваютъ уклоненія. Каждая струя, во-первыхъ, при приближеніи къ тѣлу, мѣняетъ свой курсъ, чтобы обойти его, а во-вторыхъ, пройдя его, снова приходитъ въ свой прежній курсъ; при этотъ происходитъ измѣненіе въ скорости движенія и, главнымъ образомъ, временное увеличеніе ея въ томъ мѣстномъ сжатіи (contraction) воднаго теченія, которое создано присутствіемъ тѣла. Далѣе вся масса воды продолжаетъ свое теченіе такъ, какъ будто-бы она ничего не встрѣчала на своемъ пути; струи ея, проходя мимо тѣла, увеличиваютъ свою скорость, а затѣмъ снова принимаютъ прежнюю.

Теперь вотъ что теорія струйныхъ линій доказываетъ неоспоримо: явленіе уклоненія струи отъ своего первоначальнаго курса и возвращеніе ея на прежній курсъ въ результатѣ не производитъ никакой новой силы по линіи движенія. Это легко доказать слѣдующимъ опытомъ: представимъ себѣ, что въ трубку, имѣющую по всей длинѣ своей одинаковый діаметръ и слегка изогнутую такъ, что обѣ оконечности ея имѣютъ одинаковое направленіе, впущена струя движущейся жидкости; очевидно, что уклоненіе струи отъ своего направленія вслѣдствіе кривизны трубки разовьетъ центробѣжную силу, которая будетъ стремиться двигать трубку въ извѣстномъ направленіи; но при выходѣ струи въ томъ же направленіи, въ какомъ она вошла, центробѣжная сила дѣйствуетъ обратно, такъ что въ результатѣ трубка остается на мѣстѣ, что и показываетъ, что по линіи движенія не явилось никакой новой составляющей давленія. Всѣмъ извѣстна задача о шарикѣ, пробѣгающемъ черезъ изогнутый стержень безъ тренія; если стержень изогнутъ такъ, что шарикъ вступаетъ на него въ томъ-же направленіи, въ какомъ сходитъ съ него, то въ результатѣ ни скорость движенія шарика не измѣняется, ни шарикъ не сдвигаетъ съ мѣста стержня; хотя, проходя черезъ послѣдній, шарикъ приводитъ его въ движеніе, но всегда столько-же въ одну сторону, сколько въ противную.

Далѣе, наша теорія предполагаетъ, что струя, текущая въ трубкѣ мѣстами сжатой или расширенной, претерпѣваетъ въ своемъ движеніи измѣненія совсѣмъ отличныя отъ тѣхъ, которыя можно было-бы ожидать съ перваго разу. Если струя воды движется въ трубкѣ, имѣющей одинаковый діаметръ по всей длинѣ, то при отсутствіи тренія она вездѣ оказываетъ одинаковое давленіе на ея стѣнки. Пусть, теперь, трубка въ одномъ мѣстѣ съужена и затѣмъ снова принимаетъ прежній діаметръ; тогда простымъ ариѳметическимъ слѣдствіемъ является увеличеніе скорости струи въ узкой части. *Prima facie* кажется очевиднымъ, что вода, сильно сжатая здѣсь, должна производить большее давленіе на стѣнки трубки; но на самомъ дѣлѣ выходитъ, что именно въ узкой-то части и есть наименьшее давленіе. Это доказывается такимъ образомъ: если въ стѣнкахъ трубки сдѣлать отверстія и въ нихъ вставить вертикальныя трубки, то высота столба воды въ послѣднихъ и покажетъ давленіе текущей струи на стѣнки въ соотвѣтствующихъ частяхъ; опытъ показываетъ, что наименьшая высота будетъ въ трубкѣ, вставленной при узкой части; и даже, если сжатіе значительно, вода въ ней вовсе не поднимается [1]). Изъ этого явленія ясно слѣдуютъ такіе выводы: частицы воды, двигаясь въ трубкѣ съ нѣкоторой скоростью, увеличиваютъ послѣднюю, дойдя до узкой части; это увеличеніе необходимо требуетъ допустить, что въ этомъ мѣстѣ частицы воды подвергаются сзади большему давленію, чѣмъ спереди;

[1]) Мнѣ однажды лордъ Raegley показывалъ маленькій приборъ, въ которомъ, при вдуваніи воздуха въ трубку, въ вѣтви, погруженной въ ртуть, послѣдняя поднималась въ мѣстахъ сжатія струи на семь, восемь и девять дюймовъ, вслѣдствіе разряженія.

безъ такой разности давленій не могло-бы произойти и возрастанія скорости. Итакъ, узкая часть трубки есть область наименьшаго давленія. Обратно, если возьмемъ трубку съ увеличеннымъ діаметромъ въ нѣкоторой ея части, то произойдетъ обратное явленіе: частицы воды, дойдя до расширенной части трубки, уменьшатъ свою скорость, что прямо показываетъ, что теперь спереди онѣ испытываютъ большее давленіе, чѣмъ сзади. По мѣрѣ того, какъ трубка послѣ расширенія или сжатія принимаетъ свой нормальный діаметръ, возвращается и нормальное давленіе. Измѣненія давленій таковы, что увеличеніе его уравновѣшивается уменьшеніемъ. Точное *modus operandi*, при которомъ частицы, вслѣдствіе взаимнаго ихъ дѣйствія другъ на друга, измѣняютъ свою скорость, нѣсколько сложно и запутанно; но явленіе въ такомъ видѣ, какъ я описалъ его, я считаю очевиднымъ; и несомнѣнно, каждая сжатая струя въ массѣ движущейся жидкости есть область уменьшеннаго давленія и увеличенной скорости, и обратно: каждая расширенная струя представляетъ область уменьшенной скорости и увеличеннаго давленія; еслибы въ жидкости не существовало тренія, то эти перемѣны давленія въ результатѣ не произвели-бы никакого измѣненія въ положеніи тѣла, присутствіе котораго и порождаетъ ихъ.

Теперь я могу возвратиться къ разсмотрѣнію обстоятельствъ, сопровождающихъ движеніе рыбы въ водѣ. Для этого предположу, какъ уже сказано раньше, что рыба стоитъ неподвижно, а масса воды движется на встрѣчу ей, и покажу какія измѣненія происходятъ въ скорости и давленіи частицъ, если пренебречь треніемъ; отсюда и видно будетъ дѣйствіе равнодѣйствующей всѣхъ силъ на рыбу. Подходя къ головѣ рыбы, струи воды уклоняются въ стороны, чтобы обойти ее, и движутся по кривымъ, выпуклость которыхъ обращена къ головѣ; при этомъ развивается центробѣжная сила, порождающая избытокъ давленія и образующая то, что я назвалъ областью увеличеннаго давленія; эта послѣдняя должна быть также областью уменьшенной скорости и увеличенія площади поперечнаго сѣченія струй, обтекающихъ голову. Усиленное давленіе на голову рыбы уничтожается, какъ мы сейчасъ увидимъ, такимъ-же давленіемъ на хвостъ ея. Вдоль туловища рыбы, гдѣ струи воды, послѣ упомянутаго уклоненія, снова приходятъ на свой прежній курсъ, исчезаютъ описанныя мною перемѣны въ давленіи; площадь поперечнаго сѣченія смежныхъ струй уменьшается; скорость движенія увеличивается, давленіе тоже уменьшается и при томъ такъ, что дѣйствіе частицъ воды на переднюю, широкую половину туловища уничтожается дѣйствіемъ ихъ на заднюю—узкую. Обтекая хвостъ, струи воды снова сходятся и при этомъ послѣдовательно двигаются по направленіямъ, соотвѣтственно параллельнымъ тѣмъ, по которымъ двигались, обтекая голову, только въ обратномъ порядкѣ; опять является избытокъ давленія, совершенно уравновѣшивающій давленіе на голову. Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что еслибы не существовало въ водѣ тренія, то на рыбу, плавающую въ ней, не дѣйствовали-бы никакія силы, и разъ начавъ двигаться съ постоянной скоростью, она продолжала-бы двигаться безъ всякаго сопротивленія.

Но при движеніи тѣла въ водѣ нельзя пренебрегать треніемъ; частицы воды, обтекая туловище рыбы, развиваютъ работу тренія и этимъ отталкиваютъ ее назадъ. Можетъ показаться нелѣпостью, что при соприкосновеніи воды съ такой скользкой поверхностью, какъ кожа рыбы, развивается треніе, — но между тѣмъ это именно такъ. Опытъ показалъ даже, что поверхности одинаковой гладкости подвергаются тѣмъ большему тренію, чѣмъ менѣе твердость тѣла. Треніе, производя водовороты, поглощаетъ часть работы смежныхъ струй воды, что препятствуетъ давленію на хвостъ рыбы уравновѣсить давленіе на голову ея. Движеніе воды въ прямыхъ и ровныхъ трубкахъ, а ужъ тѣмъ болѣе въ трубкахъ мѣстами сжатыхъ или расширенныхъ, значительно замедляется противудѣйствіемъ работы тренія.

Теперь разсмотримъ движеніе корабля въ водѣ. Сперва я предположу, что у него нѣтъ надводной части, т. е. что онъ срѣзанъ какъ разъ по уровню воды; пусть затѣмъ вся водная поверхность покрыта ледяной корой; корабль касается ея, но не давитъ на нее; наконецъ, допустимъ, что эта кора какъ разъ противудѣйствуетъ вертикальному давленію вверхъ частицъ воды при нормальной скорости ихъ движенія. Но эта скорость измѣнится, какъ только частицы встрѣтятъ корабль. У носа его она уменьшится вслѣдствіе вышеописанныхъ причинъ, давленіе-же увеличится, и ледъ поднимется кверху; по бортамъ корабля, гдѣ скорость увеличится, давленіе будетъ меньше, и ледъ опустится; за кормой онъ снова поднимется. Если мы сдернемъ ледяную пленку, то вода, до сихъ поръ сдерживаемая, придетъ и въ вертикальное движеніе; вслѣдствіе давленія образуются валы; но съ измѣненіемъ вида поверхности измѣняется и самое давленіе, такъ-что валы мало по малу принимаютъ формы волнъ, до нѣкоторой степени независимыя отъ первоначальныхъ формъ, породившихъ ихъ. Волны уносятся въ окружающія воды, унося съ собой и часть работы, затраченной на ихъ образованіе,—часть тѣмъ бо́льшую, чѣмъ больше скорость движенія. Въ этомъ и заключается одна изъ важныхъ причинъ сопротивленія воды на корабль, движущійся съ значительной скоростью.

Если-же скорость корабля умѣренна, не столько умѣренна, что образуемыя имъ волны опадаютъ сейчасъ-же послѣ ихъ образованія, не успѣвая распространяться дальше, то сопротивленіе на корабль зависитъ единственно отъ поверхностнаго тренія. Собственно нѣкоторая доля передняго сопротивленія является вслѣдствіе возмущенія частицъ воды отъ тренія ихъ другъ о друга и отъ образующихся отъ того водоворотовъ, трущихся о борта корабля. Но при достаточно согласныхъ обводахъ послѣдняго и при умѣренной скорости движенія обими этими обстоятельствами можно пренебречь и на практикѣ давать значеніе только поверхностному тренію. При нашихъ опытахъ, напримѣръ, оказалось, что десяти, или двѣнадцатифутовыя модели при скорости движенія 50 фут. въ минуту испытываютъ только сопротивленіе поверхностнаго тренія. Чтобы говорить Вамъ объ этомъ обстоятельствѣ съ увѣренностью, какъ объ извѣстномъ фактѣ, я долженъ былъ опредѣлить сперва силу поверхностнаго тренія; и мнѣ удалось сдѣлать это

помощью цѣлаго ряда опытовъ. Я бралъ для этого доски толщиною не болѣе одной восьмой дюйма, высотою въ девятнадцать дюймовъ, и длину ихъ разнообразилъ отъ трехъ и четырехъ дюймовъ до пятидесяти футовъ, и помощью динамометра точно опредѣлялъ сопротивленіе на всѣ части ихъ при различныхъ скоростяхъ. Обнаружилось много интересныхъ фактовъ, связанныхъ съ законами этого сопротивленія. Напримѣръ: сопротивленіе на переднюю частъ доски болѣе, чѣмъ на заднюю. И когда обдумаешь причину этого обстоятельства, то удивляешься еще, отчего разница не больше оказавшейся. Дѣло въ томъ, что передніе части доски, встрѣчая первыя сопротивленія отъ воды, въ свою очередь дѣйствуютъ на водяныя частицы, сообщая имъ поступательное движеніе по направленію своего собственнаго; слѣдовательно, послѣдующія части доски подвергаются уже тренію не стоячей воды, а участвующей въ движеніи доски, почему и сопротивленіе на нихъ уменьшается. При движеніи доски длиною въ пятьдесятъ футовъ, у задняго конца ея можно видѣть съ обѣихъ сторонъ струи воды шириною въ семь или восемь дюймовъ, и средняя скорость частицъ этихъ струй равна почти половинѣ скорости самой дости. Послѣ этого, повторяю, удивительно еще, что сопротивленіе на заднюю часть доски такъ мало умѣряется треніемъ передней части. Если передній край доски сдѣлать изъ полированнаго металла и покрыть его толстымъ слоемъ жиру, то вслѣдствіе тренія на послѣднемъ образуются борозды, тѣмъ меньшія, чѣмъ дальше отступать отъ носа; футовъ на десять отъ него уменьшеніе тренія становится сравнительно незначительнымъ. Не рискнувъ рѣшать этотъ вопросъ теоретически, я производилъ много тщательныхъ опытовъ для опредѣленія тренія на каждый квадратный футъ досокъ различной длины и съ различными поверхностями; и оказалось, что треніе есть чрезвычайно чувствительная функція обстоятельствъ, такъ-что прежде, чѣмъ передугадывать величину сопротивленія на корабль или тѣло, необходимо точно изучить всѣ качества его поверхности. Я могу сказать, что покрытая листовымъ оловомъ доска, длиною отъ семи до восьми дюймовъ, испытываетъ только половину того сопротивленія, которое приходится на такую-же точно доску, но покрытую лакомъ или политурой. При удлиненіи-же доски до пятнадцати футъ сопротивленіе оказывается одинаковымъ, какъ въ случаѣ оловянной, такъ и въ случаѣ лаковой ея поверхности. Затѣмъ, гладкія поверхности мягкаго, непрочнаго тѣла, какъ напр. тѣла рыбы, испытываютъ большее сопротивленіе, чѣмъ такія-же гладкія поверхности твердыхъ тѣлъ. Въ силу всѣхъ этихъ опытовъ, я могу приблизительно опредѣлить величину поверхностнаго тренія на корабль, если только самыя качества этой поверхности мнѣ хорошо извѣстны. Надо полагать, что модель длиною въ двѣнадцать футовъ, движущаяся со скоростью пятидесяти или шестидесяти футовъ въ минуту — что̀ равносильно тому, еслибы самый корабль въ 300 футовъ, длиною двигался со скоростью шести узловъ въ часъ—будетъ испытывать сопротивленіе, зависящее только отъ поверхностнаго тренія; динамометрическія измѣренія показали, что это, дѣйствительно, такъ. Поэтому я, не колеблясь,

скажу, что основныя положенія, высказанныя мною, суть чисто фактическіе выводы [1]).

Но при бо́льшихъ скоростяхъ являются другія важныя причины сопротивленія: это—образованіе волнъ. Это обстоятельство рождаетъ цѣлую теорію, изыскивающую такіе обводы корабля, при которыхъ образовывалось бы наименьшее количество волнъ. Однако, по моему, слишкомъ трудно удовлетворительно рѣшить задачу о томъ, какіе обводы корабля надо считать наилучшими. Когда говорятъ, что надо построить корабль извѣстной длины, ширины и высоты или глубины, съ извѣстнымъ водоизмѣщеніемъ, и притомъ такъ, чтобы онъ испытывалъ наименьшее сопротивленіе, то является множество побочныхъ вопросовъ, которые необходимо принять въ разсчетъ, какъ-то: его прочность, стоимость и т. п. Но можетъ быть всѣ эти вопросы отойдутъ на второй планъ, если рѣшить, хотя приблизительно, главный. Взглянувъ на дѣло съ болѣе общей, широкой точки зрѣнія, мнѣ кажется, можно поставить вопросъ такъ: какъ построить корабль съ *полезнымъ водоизмѣщеніемъ*, способный ходить съ данной скоростью при возможно мѣньшемъ расходѣ силы. Полезнымъ водоизмѣщеніемъ корабля я называю вѣсъ его собственнаго корпуса, затѣмъ вѣсъ его машины, угля, такелажу, экипажа, плюсъ вѣсъ наибольшаго количества груза или пассажировъ, смотря по тому, для какихъ цѣлей построенъ корабль. Очевидно, что уменьшеніе водоизмѣщенія сообразно съ главными цѣлями корабля будетъ выгодно, а не вредно.

Такъ какъ всякое видоизмѣненіе формъ корабля связано съ измѣненіемъ и каждаго изъ остальныхъ условій отдѣльно, то и очевидно, что рѣшеніе разсматриваемаго вопроса очень сложно, и нельзя прійти къ общему заключенію о наивыгоднѣйшихъ формахъ корабля. Одно изъ важныхъ обстоятельствъ, усложняющихъ эту задачу, есть тѣсная зависимость между обводами корабля и скоростью его хода. Обводы, выгодные для длиннаго корабля, при ходѣ его отъ семи, восьми, и до девяти узловъ, совсѣмъ невыгодны при скоростяхъ въ шестнадцать и восемнадцать узловъ. При умѣренныхъ скоростяхъ выгоднѣе болѣе короткій корабль, потому что, какъ мы уже знаемъ, при нихъ главнѣйшую часть сопротивленія составляетъ поверхностное треніе, которое возрастаетъ съ увеличеніемъ длины движущагося тѣла.

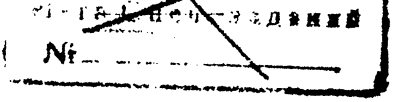
Теперь перейдемъ къ сравненію между сопротивленіемъ воды на корабль и на его модель. Получивъ кривую сопротивленія на модель, я присоединилъ къ ней еще другую кривую, ординаты которой представляютъ величину поверхностнаго тренія ея. Разность ординатъ этихъ кривыхъ даетъ величину сопротивленія, происходящаго исключительно отъ образованія волнъ при движеніи модели.

Свойство волненія таково, что подобныя волны движутся со скоростями, пропорціональными квадратнымъ корнямъ изъ ихъ размѣреній;

[1]) Та увѣренность, съ которою Фроудъ утверждаетъ свои положенія, заставляетъ насъ указать читателямъ на поводы къ сомнѣніямъ, приведенные въ главѣ 1-й, при разборѣ опытовъ Фроуда, и въ примѣчаніяхъ къ двумъ предшествующимъ приложеніямъ. *Д. Менделѣевъ.*

поэтому ясно, что, сравнивая движенія корабля и модели данной длины, надо полагать, что при этомъ они производятъ волны, подобныя между собою, если только скорости ихъ (корабля и модели) движенія соотвѣтственно пропорціональны квадратнымъ корнямъ ихъ размѣреній. Запомнимъ же, что сопротивленіе состоитъ изъ двухъ элементовъ: во 1-хъ, изъ работы поверхностнаго тренія и работы, расходуемой на образованіе водоворотовъ, а во 2-хъ, изъ работы, затраченной на образованіе волненія. Посмотримъ, какъ каждый изъ этихъ элементовъ вліяетъ на модель и на корабль: если корабль въ шестнадцать разъ длиннѣе модели, то волны, при скорости его движенія въ десять узловъ, будутъ подобны волнамъ отъ модели при скорости ея въ два съ половиною узла; такъ какъ квадратный корень изъ 16-ти равенъ 4-мъ и $2^1/_2$ есть четверть десяти; и на этомъ основаніи опредѣлимъ сопротивленіе отъ волны на корабль сравнительно съ такимъ же сопротивленіемъ на модель его. Выходитъ изъ опытовъ, что если скорости ихъ «соотвѣтственны», т. е. если онѣ пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ ихъ размѣреній, то сопротивленія отъ волненія пропорціональны кубамъ ихъ размѣреній; такъ что, въ нашемъ примѣрѣ, корабль, идущій со скоростью десяти узловъ, испытываетъ сопротивленіе отъ волны въ 4096 разъ бо́льшее, чѣмъ модель, движущаяся со скоростью двухъ съ половиною узловъ; 4096 есть кубъ 16-ти, а $2^1/_2$ равно десяти, раздѣленнымъ на корень квадратный изъ шестнадцати. Подобнымъ путемъ мы всегда по сопротивленію отъ волны на модель можемъ разсчитывать такое-же сопротивленіе на самый корабль.

Теперь остается разсчитать сопротивленіе поверхностнаго тренія на корабль; если мы съумѣемъ опредѣлить его при различныхъ скоростяхъ, то, присоединивъ къ нему соотвѣтствующія сопротивленія отъ волны, мы можемъ получить кривую всего сопротивленія на корабль, и тогда вопросъ объ опредѣленіи сопротивленія на корабль по опытамъ надъ моделью его будетъ рѣшенъ. Еслибы треніе зависѣло только отъ общей величины всей поверхности тренія, независимо отъ длины или ширины ея, то можно было-бы вывести подобное-же соотношеніе между сопротивленіемъ на модель и на корабль, какое мы вывели при сравненіи сопротивленій отъ волны; но, какъ было уже объяснено выше, сопротивленіе тренія на каждый квадратный футъ длинной поверхности меньше, чѣмъ на квадратный футъ короткой; а такъ какъ длина корабля болѣе, чѣмъ длина модели, то и сопротивленіе тренія на него приходится опредѣлять отдѣльно. Когда-же сравниваютъ между собою подобные корабли, то разницей въ длинѣ ихъ можно пренебречь, и поэтому для нихъ, на основаніи вышесказаннаго, вытекаетъ слѣдующій законъ: *Полныя сопротивленія подобныхъ кораблей при соотвѣтственныхъ скоростяхъ относятся между собою, какъ кубы ихъ размѣреній.* Начала, на основаніи которыхъ выведенъ этотъ законъ, дѣлаютъ его совершенно строгимъ, но надо помнить однако, что сопротивленіе отъ волны, въ зависимости отъ скорости, возрастаетъ неправильно.

Боясь надоѣсть слушателямъ, я не буду входить въ дальнѣйшія

подробности своихъ изслѣдованій. Скажу вообще, что для большихъ скоростей выгодно имѣть длинные корабли, потому что короткіе при такихъ скоростяхъ образуютъ большія волны; но для умѣренныхъ скоростей выгоднѣе корабли короткіе, такъ какъ поверхность тренія ихъ меньше, а при малыхъ скоростяхъ треніе и составляетъ главный элементъ сопротивленія. На практикѣ умѣренной скоростью можно считать число узловъ, равное числу единицъ въ квадратномъ корнѣ изъ длины корабля, выраженной въ футахъ. Если корабль стофутовой длины, съ очень острыми обводами, заставить идти со скоростью десяти узловъ, то сопротивленіе его будетъ очень велико, а при той-же скорости сопротивленіе на корабль обыкновенныхъ размѣровъ составляетъ одну двухъ-сотую часть всего вѣса его. Если скорость корабля въ узлахъ равна произведенію изъ 1,35 на квадратный корень изъ длины его, выраженной въ футахъ, то сопротивленіе на него очень велико; вѣроятно, оно возрастаетъ до величины одной шестой части самой скорости. Изъ двухъ кораблей, имѣющихъ одинаковые обводы, при упомянутой скорости, меньшее сопротивленіе будетъ испытывать тотъ, котораго размѣренія меньше. На пробной милѣ недавно оказалось, что «Shah» шелъ со скоростью семнадцати узловъ, когда движущая сила его составляла одну двухсотую часть его вѣса; между тѣмъ, какъ барказы Торникрофта, которые ходятъ съ такой замѣчательной быстротой, требуютъ, чтобы величина движущей силы, при скорости въ восемнадцать узловъ, составляла одну пятнадцатую часть ихъ вѣса. Такимъ образомъ мы видимъ, какъ сильно возрастаетъ сопротивленіе при увеличеніи скорости даже на суда съ острыми обводами. На основаніи всего сказаннаго, повторяю, что, при проэктированіи корабля, скорость, на которую можно разсчитывать, нужно считать равной числу единицъ въ квадратномъ корнѣ изъ длины его, выраженной въ футахъ. При такой скорости, какъ я уже сказалъ, сопротивленіе составляетъ двухсотую часть всего вѣса корабля, если только обводы его наилучшіе.